su profesor particular

MATEMATICAS PARA TODOS

ENCICLOPEDIA UNIVERSAL DE MATEMATICAS

E.G.B. / B.U.P.
C.O.U. / SELECTIVIDAD
FORMACION PROFESIONAL / OPOSICIONES

MATEMATICAS PARA TODOS

VOLUMEN 1

DIRIGIDA POR: JUAN BAUTISTA GRAU OLIVE

ESPAÑA	ENSEÑANZA GENERAL BASICA (E.G.B.) FORMACION PROFESIONAL OPOSICIONES EN GENERAL
AMERICA	BACHILLERATO PRIMARIO BACHILLERATO ELEMENTAL OPOSICIONES EN GENERAL

EDICIONES RUEDA J.M. S.A.

EDITORIAL HORIZONTE

MATEMATICAS PARA TODOS
ENCICLOPEDIA UNIVERSAL DE MATEMATICAS

Editor Ejecutivo:
JORGE NUÑEZ MARTINEZ

Equipo Técnico:
JUAN BAUTISTA GRAU OLIVE
Director de la Obra

MATILDE FERNANDEZ SANCHEZ
Licenciada en Ciencias Económicas
Licenciada en Economía Monetaria
Fiscal e Internacional

Mª DEL CARMEN JIMENEZ ALONSO
Licenciada en Ciencias Biológicas
Licenciada en Bioquímica y Biología
Molecular

BERNABE TIERNO JIMENEZ
Licenciado en Ciencias de la Educación
Licenciado en Psicología
especializado en Psicopedagogía

LAURA ALTEMIR PONS
Licenciada en Ciencias Químicas

MARIAN JUAREZ ALVAREZ
Licenciada en Ciencias Químicas

PILAR CUEVAS
Especializada en Arte

CARMEN CARRASCOSA C.
Licenciada en Ciencias de la Educación

ISABEL FERNANDEZ
Profesora de E.G.B.

AMADEO FERNANDEZ
Dibujo, Confección y Diseño

FOTOGRAFIA
Iznajar y varios

ADMINISTRADOR GENERAL
José Rodríguez Martín

© Es una producción de COEDIGRAP, S.A.
para Editorial Horizonte

NUEVA EDICION:

I.S.B.N. (obra comp.) n.º 84-86007-00-3

PRESENTACION DE LA OBRA

No creemos que exista en los estudios de EGB o de BUP obras de consulta tan completas como la que aquí vamos a tratar.

Intentaremos estudiar las matemáticas bajo unas bases definidas a continuación:

Primero; explicar de una manera amena y que no sea una losa árida *con la que se encuentran todos los estudiantes.*

Segundo; vamos a estudiarlas por el mismo orden que se estudian éstas, es decir, procurar darle entrada a la geometría o al álgebra en su momento y no de una manera anacrónica o liberal como se ha tratado en otras obras.

Tercero; enseñaremos al alumno el método de deducción, porque ¿cuántas fórmulas hay a todo lo largo de los estudios que se tiene que aprender de memoria? Por ejemplo, se sabe que el teorema de Pitágoras es $a^2 + b^2 = c^2$, *pero ¿se sabe el porqué de esta fórmula?, ¿se sabe deducir?, ¿se sabe de dónde sale? No. Aquí no* cuadricularemos *el cerebro del estudiante, aquí le enseñaremos a estudiar las matemáticas, y lo que es más, le enseñaremos MATEMATICAS.*

Están escritas para mentes incluso bajas, se repetirán mucho las explicaciones; así, para el alumno que tenga un coeficiente de inteligencia alto, éstas serán como un paseo y para aquellos que el coeficiente sea bajo, a fuerza de repetir las explicaciones lo aprenderán.

No se pretenda con esto equivocar conclusiones. No quiero que se interpreten mal mis palabras. Piensen, que en seis o siete horas de clase en una academia, colegio o instituto no se pueden abordar todas las asignaturas en el día y los profesores se sienten incapacitados para explicarlas como deben.

Por otra parte, quien no ha comprendido perfectamente las matemáticas, difícilmente comprenderá la física.

¿Cuántas vacaciones han sido truncadas, para los padres, por culpa de las matemáticas de los hijos? Y lo que es peor, ¿cuántos traumas tienen los estudiantes con las matemáticas?

GARANTIZAMOS que a todo estudiante que siga las matemáticas que tiene usted ahora en sus manos, se le acabarán los suspensos. *Garantizamos, en fin, que a todo estudiante que siga nuestro* método didáctico *le haremos aumentar las notas considerablemente. Lo certificamos formalmente.*

Así, de esta manera, se puede tener un profesor particular *las 24 horas del día*

Para los jóvenes o mayores que estudien después del trabajo, para los que estudian oposiciones (banca, ministerios, oficinas públicas o privadas, etc.) y que las matemáticas son la llave *para cualquier oposición.*

Unicamente deseo añadir el agradecimiento a la acogida que se ha dispensado a la obra, tanto por mis más inmediatos colaboradores, como por el equipo editorial, sin cuya labor no hubiera sido posible su realización.

Queridos amigos, hasta siempre.

ÍNDICE DEL VOLUMEN 1

TEMA 1 EL NUMERO 7
INTRODUCCION. RESEÑA HISTORICA
EVOLUCION DEL CONCEPTO DE NUMERO
Evolución del concepto de número desde el punto de vista de las matemáticas.
Evolución del concepto de número desde el punto de vista de la aritmética.

OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS
Suma y diferencia.
Producto. Criterio de signos.
Cociente. Criterio de signos.
SIMBOLOGIA MATEMATICA FUNDAMENTAL

TEMA 2 GENERALIDADES SOBRE CONJUNTOS 17
CONCEPTO DE CONJUNTO.
FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO.
Por extensión.
Por comprensión.
RELACIONES POSIBLES ENTRE DOS CONJUNTOS.
Conjuntos iguales.
Subconjuntos. Inclusión;
Conjuntos solapados.
Conjuntos disjuntos.
COTAS DE UN CONJUNTO.
Conjunto Universal.
Conjunto vacío.
CONJUNTOS PARTICULARES.
CONJUNTO DE LAS PARTES.
PARTICION DE UN CONJUNTO.
CUANTIFICADORES.
DIAGRAMAS DE VENN.

TEMA 3 OPERACIONES CON CONJUNTOS 27
UNION DE CONJUNTOS.
INTERSECCION DE CONJUNTOS.
COMPLEMENTACION DE CONJUNTOS.
DIFERENCIA DE CONJUNTOS.
SUMA BOOLEANA O DIFERENCIA SIMETRICA.
FORMAS GENERALES DE OPERAR CON CONJUNTOS.
Operativa corriente.
Operativa por diagramas de Venn.
Operativa por petenencias.
NUMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO.
CARDINAL DE UN CONJUNTO.

TEMA 4 CORRESPONDENCIA **43**
CONCEPTO DE PAR. DIAGRAMAS.
Diagrama cartesiano.
Diagrama de flechas o sagital.
PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS.
CONCEPTO DE CORRESPONDENCIA.
TIPOS DE CORRESPONDENCIAS.
Correspondencia Pluriunívoca.
Correspondencia Unívoca.
APLICACIONES.
TIPOS DE APLICACIONES.
Aplicación suprayectiva, sobreyectiva o exhaustiva.
Aplicacion inyectiva.
Aplicación biyectiva o biunívoca.
RESUMEN DE CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES.
CONCEPTO DE FUNCION.
CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES INVERSAS.
PRODUCTO DE APLICACIONES. APLICACION COMPUESTA.
CLASIFICACION DE CONJUNTOS.
Conjuntos coordinables o equipotentes.
Conjunto finito.
Conjunto infinito.
Conjunto numerable.

TEMA 5 RELACIONES BINARIAS **71**
CONCEPTO DE RELACION BINARIA.
PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS.
Propiedad Reflexiva.
Propiedad Simétrica.
Propiedad Transitiva.
Normas para plantear las propiedades.
TIPOS DE RELACIONES BINARIAS.
Relación de equivalencia.
1.º Partición.
2.º Clase de Equivalencia. Representante de clase. Elementos equivalentes.
3.º Conjunto cociente.
Relaciones de orden.
1.º Relaciones de orden total.
2.º Relaciones de orden parcial.
3.º Gráfico de las relaciones de orden. Diagramas de Hasse.
ELEMENTOS NOTABLES DE UNA PARTE DE UN CONJUNTO ORDENADO.
PARTES NOTABLES DE UN CONJUNTO ORDENADO. CONJUNTO CONVEXO.
CONJUNTOS BIEN ORDENADOS.

TEMA 6 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS **97**
INTRODUCCIONES.
LEYES DE COMPOSICION.
Leyes de composición interna. Operaciones internas.
Leyes de composición externa. Operaciones externas.
CONCEPTO DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA.
PROPIEDADES DE LAS LEYES DE COMPOSICION INTERNA.
Propiedad asociativa.
Propiedad conmutativa.
Propiedad del elemento neutro.
Propiedad del elemento simétrico.
Normas para comprobar las propiedades.
GRUPOS
CONSIDERACIONES EN LOS GRUPOS.
PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.
ANILLOS.
CUERPOS.
APLICACIONES ENTRE ESTRUCTURAS.
Homomorfismos.
Tipos de homomorfismos.
RETICULOS. ALGEBRA DE BOOLE.
Concepto de retículo.
Tipos de retículos.

TEMA 7 DIVISIBILIDAD **131**
INTRODUCCION.
PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD.
NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS.
Números primos.
Números compuestos.
PROPIEDADES DE LOS NUMEROS PRIMOS.
PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMPUESTOS.
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.
DESCOMPOSICION DE UN NUMERO EN FACTORES PRIMOS.
FORMA DE LOCALIZAR LA CANTIDAD DE DIVISORES DE UN NUMERO.
Suma de los divisores de un número.
Producto de los divisores de un número.
CONDICION GENERAL DE DIVISIBILIDAD.
MAXIMO COMUN DIVISOR.
Por divisiones sucesivas. Algoritmo de Euclides.
Por descomposición en factores primos.
PROPIEDADES DEL MAXIMO COMUN DIVISOR.
MINIMO COMUN MULTIPLO.
PROPIEDADES DEL MINIMO COMUN MULTIPLO.
RELACION ENTRE EL M.C.D. Y EL M.C.M. DE DOS NUMEROS.
PARTICULARIDADES EN LA DIVISIBILIDAD.
Cálculo de dos números con el dato de su suma.
Cálculo de dos números con el dato de su diferencia.
Cálculo de dos números con el dato de su producto.
Cálculo de dos números con el dato de su cociente.
ESTRUCTURA ALGEBRAICA EN LA DIVISIBILIDAD.

TEMA 8 CONGRUENCIAS NUMERICAS **153**
INTRODUCCION.
Primera definición.
Segunda definición.
PROPIEDADES DE LOS NUMEROS CONGRUENTES.
OPERACIONES CON CONGRUENCIAS.
CONSECUENCIAS DE UNA CONGRUENCIA.
Relación de equivalencia en Z.
Estructura algebraica en Z.
NUMEROS INCONGRUENTES. SISTEMAS COMPLETOS.
RESTOS POTENCIALES.
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD. APLICACIONES.
Teorema fundamental.
Consecuencias del teorema fundamental.

TEMA 9 LOGICA **169**
INTRODUCCION.
CONCEPTO DE PROPOSICION.
TIPOS DE PROPOSICIONES.
Proposiciones simples.
Proposiciones compuestas.
TABLAS DE VERDAD.
OPERACIONES CON PROPOSICIONES.
Disyunción inclusiva.
Disyunción exclusiva.
Conjunción.
Negación.
Implicación Lógica.
Equivalencia Lógica.
TIPOS DE PROPOSICIONES.
Tartología.
Contradicción.
Indeterminación.
INFERENCIA LOGICA.
ESTRUCTURA PROPOSICIONAL. ALGEBRA DE BOOLE.

TEMA 10 SISTEMAS DE NUMERACION **183**
INTRODUCCION.
TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS SISTEMAS DE NUMERACION.
DESCOMPOSICION POLINOMICA DE UN NUMERO.
TRANSFORMACION A DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACION.
Paso de un número en base decimal a otro en base cualquiera.
Paso de un número en base cualquiera a otro en base decimal.
Paso de un número en base cualquiera a otro en base cualquiera.

TEMA 11 CIRCUITOS LOGICOS **191**
INTRODUCCION.
CONCEPTO DE CIRCUITO LOGICO.
TABLAS DE RESPUESTA.
ASOCIACION DE INTERRUPTORES. OPERACIONES.
Asociación en serie.
Asociación en paralelo.
Interruptor contrario.
CIRCUITOS EQUIVALENTES.
ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS CIRCUITOS.

TEMA 12 FRACCIONES **203**
CONCEPTO DE FRACCION.
TIPOS DE FRACCIONES.
Número mixto.
Fracción propia.
Fracción impropia.
Fracción generatriz.
Fracción generatriz decimal exacta.
Fracción generatriz periódica pura.
Fracción generatriz periódica mixta.
PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES.
REDUCCION DE FRACCIONES A MINIMO COMUN DENOMINADOR.
OPERACIONES CON FRACCIONES.
Suma y diferencia. Producto. Cociente.
CONSTRUCCION DE LOS CONJUNTOS DE NUMEROS.
Construcción del conjunto de los números enteros.
Construcción del conjunto de los números racionales.

TEMA 13 POTENCIACION **217**
CONCEPTO DE POTENCIA.
PARTICULARIDADES EN LA POTENCIACION.
OPERACIONES CON POTENCIAS.
Producto de potencias de la misma base.
Cociente de potencias de la misma base.
Potencia de potencia.
Potencia de un producto.
Potencia de un cociente.

TEMA 14 INTRODUCCION A LOS POLINOMIOS **225**
(1.ª Parte)
EXPRESIONES ALGEBRAICAS.
CONCEPTO DE MONOMIO.
CONCEPTO DE POLINOMIO.
OPERACIONES CON POLINOMIOS.
Suma de polinomios.
Diferencia de polinomios.
Multiplicación de polinomios.
División de polinomios con una variable o letra.
División de polinomios con dos o más variables o letras.
División de polinomios por $x - a$. Regla de Ruffini.
DIVISIBILIDAD CON POLINOMIOS.
MAXIMO COMUN DIVISOR DE VARIOS POLINOMIOS.
M.C.D. de monomios. M.C.D. de polinomios.
MINIMO COMUN MULTIPLO DE VARIOS POLINOMIOS.
M.C.M. de monomios. M.C.M. de polinomios.
TEOREMA DEL RESTO.
TEOREMA DEL FACTOR.
DIVISION DE $x^n \pm a^n$ ENTRE $x \pm a$.
FACTOR COMUN DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA.
DESARROLLOS POLINOMICOS NOTALBES.
Cuadrado de una suma polinómica.
Cuadrado de una diferencia polinómica.
Diferencia de cuadrados.
Cubo de una suma polinómica.
Cubo de una diferencia polinómica.
SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.
ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS POLINOMIOS.

TEMA 15 RADIACION **257**
CONCEPTO DE RAIZ.
CONEXION ENTRE LA RADICACION Y LA POTENCIACION O VICEVERSA.
PRODUCTO DE RADICALES DEL MISMO INDICE.
COCIENTE DE RADICALES DEL MISMO INDICE.
REDUCCION DE RADICALES A INDICE COMUN.
SIMPLIFICACION DEL INDICE Y DEL EXPONENTE DEL RADICANDO.
EXTRACCION DE FACTORES.
POTENCIA DE UNA RAIZ.
RAIZ DE RAIZ.
RACIONALIZACION.
ESTUDIO DE LA RAIZ CUADRADA.
Cálculo de la raíz cuadrada.
Restos por exceso y por defecto en una raíz cuadrada.

TEMA 16 ESTUDIO GENERAL DE ECUACIONES **273**
CONCEPTO DE IGUALDAD, IDENTIDAD Y ECUACION.
TRANSPOSICION DE TERMINOS. REGLAS
ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.
SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO O LINEALES
Método de sustitución.
Método de igualación.
Método de reducción.
Coordenadas cartesianas o rectangulares.
Método gráfico.
Sistemas de más de dos ecuaciones o incógnitas.
ECUACION DE SEGUNDO GRADO. PRIMERA FORMA GENERAL. SOLUCIONES
NATURALEZA DE LAS RAICES DE UNA ECUACION.
ECUACIONES INCOMPLETAS DE SEGUNDO GRADO.
SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAICES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO.
ECUACION DE SEGUNDO GRADO. SEGUNDA FORMA GENERAL.
FORMA CANONICA.
ECUACION DE SEGUNDO GRADO. TERCERA FORMA GENERAL.
DESCOMPOSICION EN PRODUCTO.
REPRESENTACION GRAFICA DE LA ECUACION EN SEGUNDO GRADO.
SISTEMA DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.
ECUACION BICUADRADA.
ECUACIONES IRRACIONALES.
ECUACIONES RECIPROCAS.
Ecuación recíproca de cuarto grado.
Ecuación recíproca de tercer grado.
Ecuación recíproca en quinto grado.
PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES. PROBLEMAS.
PROBLEMAS SOBRE MOVILES.
PROBLEMAS SOBRE RELOJES.
PROBLEMAS SOBRE GRIFOS.
PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS.
PROBLEMAS SOBRE ALEACIONES.

TEMA 1

EL NUMERO

INDICE

1.–INTRODUCCION. RESEÑA HISTORICA

2.–EVOLUCION DEL CONCEPTO DE NUMERO

A.–Evolución del concepto de número desde el punto de vista de las matemáticas

B.–Evolución del concepto de número desde el punto de vista de la aritmética

3.–OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS

A.–Suma y diferencia

B.–Producto. Criterio de signos

C.–Cociente. Criterio de signos

4.–SIMBOLOGIA MATEMATICA FUNDAMENTAL

TEMA 1

Los hombres primitivos, sin conocer ni las matemáticas ni sus fundamentos, ya las empleaban de una forma intuitiva; las construcciones que realizaban amontonando grandes piedras, son verdaderos prodigios de equilibrio. Equilibrio tan perfecto que les ha permitido, desafiando el paso de los siglos y los embates de la naturaleza, llegar hasta nuestros días.

Los dólmenes están construidos con una gran piedra horizontal que se apoya en una o varias verticales. Los menhires son grandes bloques de piedra clavados verticalmente en el suelo. El más antiguo y el más grande se encuentra en Francia; mide 21 metros de altura y pesa más de 300 toneladas.

EL NUMERO

1.–INTRODUCCION. RESEÑA HISTORICA

El hombre primitivo, en su estado salvaje, poseía como único sustento los elementos que la Naturaleza le ofrecía generosa y espontáneamente, como son los frutos, los animales y la pesca.

Estas formas naturales condicionaban su modo de vida, de tal forma, que alguno de estos fenómenos le llegaron a impresionar tanto, que incluso llegó a divinizarlos, ya que inicialmente era incapaz de comprenderlos.

Después, no satisfecho con la observación de los fenómenos, le tentó la curiosidad de investigarlos. A medida que aumentaba la población de aquellas sociedades primitivas, empezaron a escasear los recursos naturales y el hombre tuvo que dedicarse a la agricultura y a la ganadería (los egipcios eran fundamentalmente agrícolas, debido a la fertilidad del río Nilo, y los babilónicos se dedicaron al pastoreo, debido a la escasa vegetación que existía en su zona).

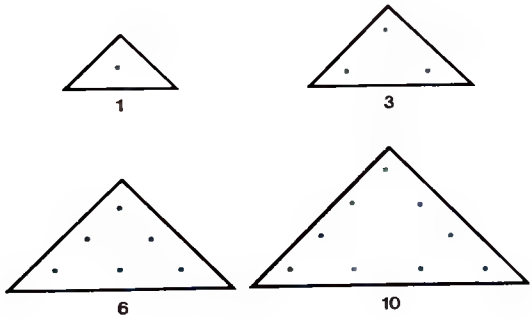
De esta forma se inicia por parte de los pueblos una actividad concreta que decide el intercambio de productos, dando lugar al comercio y a la navegación, actividades que fueron fundamentalmente el origen de las matemáticas, ya que para sus transacciones comerciales tuvieron que aprender a contar y a medir.

Inicialmente, la geometría aportó los primeros elementos necesarios para el desarrollo de las matemáticas (en los tratados antiguos predominan las relaciones geométricas).

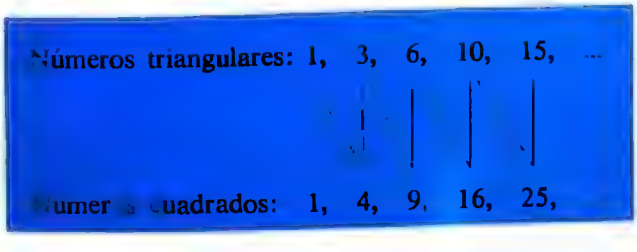
A continuación, la aritmética avanza a merced del invento del calendario y de los ábacos. Comienza así a sistematizarse el uso de la matemática, profundamente ligada a la filosofía (las primeras escuelas fueron creadas por Tales de Mileto, Pitágoras y Euclides).

La aritmética de Pitágoras tenía mucha relación con las propiedades de tipo místico que se asociaban a los números naturales. (El 1 se asociaba con un punto, el 2 con una línea, con la opinión o con la femineidad, el 3 con una superficie o con la masculinidad, el 4 con el espacio o con la justicia, etc.).

También los pitagóricos prestaron especial atención a los números que ellos llamaban triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, ... (debido a que cada uno de estos números llenan perfectamente el interior de un triángulo de lados iguales con puntos igualmente espaciados y representativos del número en cuestión).



Los pitagóricos descubrieron, por ejemplo, la relación entre los números triangulares y los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16, 25..., expresando que la suma de los números triangulares consecutivos es un número cuadrado de un número natural:



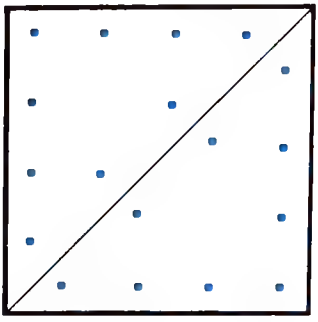
Este detalle se puede observar inmediatamente poniendo un triángulo de los citados, junto a otro consecutivo, produciendo su

SIMBOLOS EMPLEADOS EN EL TEXTO MATEMATICO

- $\Rightarrow$: **implica.**
- $\Leftrightarrow$: **equivale a.**
- $\in$: **pertenece a.**
- $\notin$: **no pertenece a.**
- $\cup$: **unión (reunión).**
- $\cap$: **intersección.**
- $\subset$: **incluido en o contenido en (subconjuntos).**
- $\not\subset$: **no incluido en.**
- ϕ : **conjunto vacío.**
- N^* : **conjunto de los números naturales sin el cero.**
- N : **conjunto de los números naturales.**
- Z : **conjunto de los números enteros.**
- Z^+ : **conjunto de los números enteros positivos (N).**
- Z^- : **conjunto de los números enteros negativos.**
- Q : **conjunto de los números racionales.**
- Q^+ : **conjunto de los números racionales positivos.**
- Q^- : **conjunto de los números racionales negativos.**
- R : **conjunto de los números reales.**
- R^+ : **conjunto de los números reales positivos.**
- R^- : **conjunto de los números reales negativos.**
- C : **conjunto de los números complejos.**
- $<$: **indica mayor (por la derecha) y menor (por la izquierda).**
- $\not<$: **indica que no es mayor (por la derecha) y que no es menor (por la izquierda).**
- $=$: **igualdad.**
- $\neq$: **no es igual.**
- $\forall$: **para todo**
- $\exists$: **existe al menos.**

Podemos maravillarnos de lo pronto que el ser humano desarrolló su sentido de la propiedad. Aprendió a preparar cuevas, construir refugios, vivir en grupos familiares, y ya aquí necesitó aprender algún sistema para contar. Su problema cuando cazaba animales o reunía hachas de sílex lo resolvía marcando muescas en un tronco, añadiendo piedras en una vasija de barro o como le resultase más cómodo. Esta necesidad de contabilizar sus propiedades tenía en cada tribu su forma característica.

formación un cuadrado perfecto geométrica y matemáticamente.



Es obvio que las líneas principales seguidas por el pensamiento griego fueron fundamentales en el desarrollo de las matemáticas; sin embargo, extinguido tal período de florecimiento, los árabes, mediante la adquisición de convencimientos y de las influencias rendidas, se convirtieron en auténticos guardianes del conocimiento y saber científicos.

De todas formas no debe suponerse que la ciencia pudo adquirir dimensiones de monopolismo por parte de los árabes en su época y quedar completamente estancada en otras zonas del mundo, aunque su desarrollo estuviese localizado en zonas determinadas como, por ejemplo, el interés que se ejerció en la ciencia y a través de las órdenes monásticas.

Sin embargo, cualquiera de estos fenómenos y desarrollos quedó en cierto modo eclipsado por el advenimiento del Renacimiento (igualmente que surgió y feneció la confianza en la infalibilidad de Aristóteles o en La Escolástica de Santo Tomás de Aquino). La explosión científica y en todos los órdenes que jugó el Renacimiento (Siglo XVI) puso en tela de juicio la reforma científica que se presentía entre los hombres, que buscaban una causa y unos efectos del hecho sencillo y simple de unas leyes naturales que no podían negar.

Con Leonardo da Vinci surgió una nueva concepción de los métodos científicos, basada en tres principios fundamentales: la observación, examinar esas observaciones mediante la matemática y concluir con un experimento que probase las conclusiones finales.

Este inicio marcó la etapa que en cierto modo existe en nuestros días y que a través de Galileo Galilei, Isaac Newton, Albert Eistein e infinidad de hombres y mujeres de ciencia nos han legado a nosotros para una mayor comprensión de los fenómenos naturales, esquematizados a través de una fórmula y operativa matemática.

NOTA.—En estos fascículos pretendemos enseñar las matemáticas de un modo exhaustivo y práctico, para conseguir que los alumnos las dominen a la perfección.

Es obvio que la historia de las mismas y las anécdotas que se relacionan con ellas no pretenden tener absoluto rigor, y las publicamos en columnas laterales recuadradas, y con su correspondiente ilustración, para dar amenidad a la publicación.

Quede bien claro, no obstante, el absoluto rigor y empeño didáctico del texto matemático en sí.

2.—EVOLUCION DEL CONCEPTO DE NUMERO

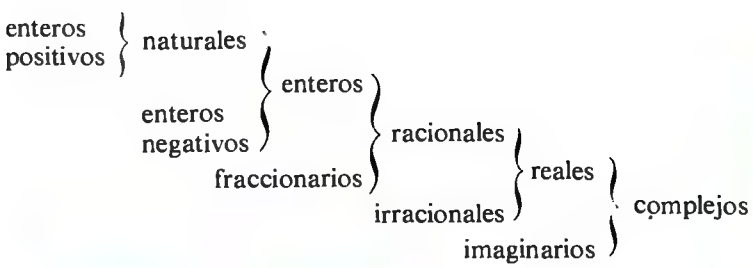
Inicialmente para precisar el concepto de número es primario el decidir una unidad determinada.

Pues bien, al comparar una cantidad con la unidad que le corresponda, surge el concepto de número.

Es decir, un número representa un conjunto de unidades.

Posteriormente, el germano Cantor se dio cuenta que para comprender el concepto de número natural, se cuestionaba la necesidad de hacer un estudio de los conjuntos de objetos. A continuación se muestra la evolución exhaustiva que han seguido los números desde dos puntos de vista, el general de las matemáticas y el particular de la aritmética como parte de las matemáticas.

A.—Evolución del concepto de número desde el punto de vista de las matemáticas



[redacted] Se llaman así a los números enteros positivos: 0, 1, 2, 3, ...

[redacted] Son los números enteros negativos: 0, −1, −2, −3, ...

[redacted] Son los números enteros positivos y negativos: 0, ±1, ±2, ±3, ...

[redacted] Son los números positivos y negativos propiamente fraccionarios que no pueden ser enteros: $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{5}$, ...

Para los sumerios, los movimientos de los astros tenían vital importancia. Hasta tal punto, que todos los acontecimientos de los individuos estaban señalados en las estrellas.

Al estar dividida la circunferencia en 360 grados o partes iguales, el año también lo dividieron en 360 días (esto es, a día por grado).

A los sumerios, pues, se debe la división del año, así como los primeros estudios de Astronomía

COMO MULTIPLICAN LOS COSACOS

Mientras los multiplicandos se dividen por 2 (siempre que sea impar, se hace por *defecto*) el multiplicador se multiplica por 2. Así hasta que el multiplicando sea 1. Se suman todos los multiplicadores que su multiplicando sea impar (en el ejemplo, los multiplicandos impares al 137 su multiplicador es *28*, y es la primera cifra a sumar. El siguiente, su multiplicando impar es *224*, segunda cifra a sumar. Por último el multiplicando 1 su multiplicador es 3.584, tercera cifra a sumar entonces, 28 + 224 + 3.584 = 3.836; 3.836 = 137 × 28. Haga la prueba.

137 ×	28 = 3.836
68 –	56
34 –	112
17 –	224
8 –	448
4 –	896
2 –	1.792
1 –	3.584
	3.836

28
+ 224
+ 3.584
3.836

Racionales. Son los números enteros que pueden adquirir características de fraccionarios y los propiamente fraccionarios que no pueden ser enteros: $0, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{5}, \ldots$

Irracionales. Son los números que están bajo un radical y que al extraerle la raíz no presentan ningún tipo de período.

Ej.: $\sqrt{4} = 2$ (no es irracional porque el período es $2,\widehat{0}$).

Ej.: $\sqrt{2} = 1{,}41 \ldots$ (es irracional porque no presenta período).

Reales. Son todos los números que existen y que están definidos en el campo real.

Imaginarios. Son los números de raíces de índice par cuyo radicando es negativo.

Complejos. Son en definitiva y de forma absoluta todos los números que existen.

NOTA.–Todos estos tipos de números los estudiaremos de forma exhaustiva y a lo largo de los temas que se van a ir sucediendo, donde se irán aclarando todos los conceptos que es imposible exponerlos en este tema de introducción.

B.–Evolución del concepto de número desde el punto de vista de la aritmética

- Cualitativamente (cómo son)
  - Abstractos
  - Concretos
    - Homogéneos
    - Heterogéneos
    - Complejos
    - Incomplejos
- Cuantitativamente (cuántos son)
  - Enteros
  - Fraccionarios
  - Mixtos
  - Decimales

Abstractos. Cuando no indican la característica de sus unidades: quince, veinte, ...

Concretos. Cuando nos indican las características de sus unidades: 2 patos, 3 cigarros, 6 pesetas.

Homogéneos. Cuando se componen de unidades de la misma característica: 2 pesetas, 10 pesetas...

Heterogéneos. Cuando indican unidades de distintas características: 3 cigarros, 2 libros, ...

Complejos. Cuando se componen de varios números concretos de distintas características: 2 kilogramos, 3 pesetas, ...

Incomplejos. Cuando se componen de varios números que pertenecen a una sola característica: 2 pesos, 3 solares, 4 pesetas, ...

Enteros. Cuando expresan una cantidad de unidades completa: 3 mesas, 2 pesetas, ...

Fraccionarios. Cuando expresan parte o partes iguales de una unidad: $\frac{1}{5}$ de peseta, $\frac{2}{5}$ de kilómetro, ...

Mixtos. Cuando constan de una parte entera y otra fraccionaria: $3\frac{2}{5}$ de pesetas.

Decimales. Cuando expresan parte o partes de una unidad, disminuyendo de 10 en 10 respecto de ésta: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$

3.—OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS

En este tema y en este apartado únicamente trataremos las operaciones elementales con números naturales positivos y negativos y en el sistema de base decimal. Posteriormente y en los temas que correspondan se efectuará un tratamiento profundo de otros números que reúnan otras características operacionales.

Sin embargo, hay que hacer notar que, independientemente del conocimiento de "Las cuatro reglas", es absolutamente necesario tener conocimiento de este tipo de operaciones.

A.—Suma y diferencia

En general, cuando se están sumando o restando números positivos o negativos, se procede de dos formas:

Se suman por una parte todos los positivos y, por otra, todos los negativos, llegando a una operación donde no existe nada más que un número positivo y otro negativo; a continuación se restan y se pone el signo del mayor.

Ej.: $+2+3=+5$

» $-2-7=-9$

» $+8-3=+5$

» $-10+3=-7$

» $+3-5+8-6+7-2=+18-13=+5$

» $+7-5+3+8-5+13+2-7=+33-17=+16$

» $-5-6+2-10+7-2=-23+9=-14$

En Mesopotamia se han encontrado numerosas tablillas con contabilidades. Y las tablillas con tablas numéricas son las más antiguas. En esta época aparece el sistema sexagesimal. Este sistema nació de la necesidad comercial de unificar los pesos y los precios y desempeñó un papel preponderante en la relación comercial de la época.

Tres niños se toman tres refrescos en el parque. Preguntan el precio y les dicen que son 30 pesetas.

Le dicen al camarero (después de pagarle las 30 ptas.) que si les pueden devolver algo, ya que el día anterior la misma consumición les costó 24 ptas. El camarero, después de consultar con el dueño, recibió la orden de devolver 5 ptas. Este vio que no iba a recibir propina y además dividir 5 ptas. entre 3 no era tarea fácil. Se quedó con 2 ptas. y les devolvió 3.

El camarero anda hoy todavía buscando una peseta. Esto es, cada niño le dio 10 ptas. para cobrar, pero luego le devolvió una a cada uno, o sea, que cada niño pagó 9 ptas. Entonces $9 \times 3 \quad 27$ ptas., más 2 ptas. que el mismo camarero se quedó, ¿dónde está la otra peseta?

SOLUCION

La solución verdadera es la siguiente: el dueño cobró 25 ptas., más 3 ptas. que dio a los niños son 28, más 2 que se quedó el camarero son 30 ptas.

También se pueden ir sumando los números unos con otros de forma itinerante reteniendo la solución de cada resultado con dos de los números para hacerlo con el siguiente y llegando al mismo resultado.

Ej.: $+ \underbrace{7 - 5}_{+2} + \underbrace{3 + 8}_{+5} - \underbrace{5 + 13}_{+13} + \underbrace{2 - 7}_{+8} = \underbrace{+ 21}_{+21} \underbrace{+ 23}_{+23} \underbrace{+ 16}_{+16}$

NOTA.—Téngase en cuenta lo siguiente:

Cada signo únicamente afecta al número que le sigue hasta que aparezca otro número.

Si algún número no lleva signo delante de él, se supone automáticamente que su signo es positivo (+).

Téngase en cuenta que muchas veces se habla de la diferencia como si fuese una suma (la diferencia se entiende como una suma de restar).

B.—Producto. Criterio de signos

Inicialmente debemos conocer el criterio de signos cuando haya que multiplicar números:

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$

NOTA.—El punto (·) indica producto (multiplicación) dado lo inusual en matemáticas de la utilización del signo (×) para indicar un producto.

En la tabla anterior podemos apreciar que signos de la misma familia multiplicándose siempre dan un resultado positivo y signos de distinta familia multiplicándose dan un resultado negativo.

Hay que hacer notar también la utilización del paréntesis en los productos, de vital importancia en cuanto a la configuración e interpretación de operaciones. Cualquier signo que vaya delante de un paréntesis indica la obligación de multiplicar (de multiplicar los números y los signos).

Ej.: $(+2) \cdot (+3) = +6$

Ej.: $(-5) \cdot (-2) = +10$

Ej.: $(+6) \cdot (-3) = -18$

Ej.: $(-7) \cdot (+2) = -14$

Ej.: $(+5) \cdot (-3) = -15$

Ej.: $(+1-2-3) \cdot (+2-7-5) = (-4) \cdot (-10) = +40$

Ej.: $-3 \cdot (+2-7+1)-4 \cdot (+5-2) = -3 \cdot (-4)-4 \cdot (+3) = +12-12 = 0$

Ej.: $-(5+6-3) = -(+8) = -8$

Ej.: $-(5+3-10) + 3(-5+2-7) + (3-2) = -(-2) + 3(-10) + (+1) = +2-30+1 = -27$

Ej.: $+3(-2-5+3) = +3(-4) = -12$

C.—Cociente. Criterio de signos

El criterio de signos en el cociente es similar al del producto: El cociente (división) de signos de la misma familia da siempre un resultado positivo y el cociente de signos de distinta familia da siempre un resultado negativo.

Alba Longa, ciudad situada en el Lacio y considerada el origen de todas las ciudades latinas, incluso de Roma, que más tarde fue su gran rival, estuvo situada a orillas del lago Albano. Nietos del último rey fueron los gemelos Rómulo y Remo, que abandonados por sus padres al nacer, fueron amamantados por la loba.

Llegados a la mocedad, dieron muerte al usurpador Amulio, repusieron en el trono de Alba Longa a su abuelo y posteriormente, en el monte Palatino, fundaron la ciudad de Roma.

Roma fue en sus primeros tiempos una modesta aldea; más tarde extendió su poderío por las regiones circundantes y en el siglo III a. de C. las primeras legiones romanas, después de grandes y duros combates, consiguen el dominio de toda la península. Una vez realizada esta unidad y viendo la gran superioridad conseguida en su organización militar, se lanza a conquistas sucesivas, lo que la lleva a ser la primera potencia que dominó toda la zona ribereña del Mediterráneo.

El nacimiento del Islán se puede situar en el año 622, cuando Mahoma llega a Medina.

Mahoma, que había predicado a sus discípulos la creencia en un Dios único, el dogma de la resurrección y la revelación divina, consiguió dar gran impulso a esta nueva religión, que se extendió progresivamente, y que adquirió una notable unidad ya en vida de su fundador.

Después de sus conquistas militares, los árabes cultivaron las ciencias, siendo su principal cualidad, en un principio, la traducción a su lengua de obras griegas, indias y persas que, ordenadas y comprobadas, pusieron en un lenguaje claro y didáctico para el lector de la época.

En el siglo XI se establecieron en España "Los Hermanos de la Pureza": grupo científico de primer orden que dio impulso a los estudios matemáticos.

$$\frac{+}{+} = + \quad \begin{cases} \text{Ej.: } \dfrac{+10}{+2} = +5 \\ \text{Ej.: } \dfrac{9}{3} = 3 \end{cases}$$

$$\frac{-}{-} = + \qquad \text{Ej.: } \frac{-20}{-2} = +10$$

$$\frac{+}{-} = - \qquad \text{Ej.: } \frac{+50}{-2} = -25$$

$$\frac{-}{+} = - \qquad \text{Ej.: } \frac{-75}{+5} = -15$$

4.—SIMBOLOGIA MATEMATICA FUNDAMENTAL

El signo = indica "igual".

El signo ≡ indica "idéntico".

El signo > indica: por la izquierda "mayor" y por la derecha "menor".

Ej.: 3 > 2

A veces se le añade también el signo igual, con lo que la representación adopta la forma: ⩾

El signo ≃ indica "aproximadamente".

El signo + indica "suma".

El signo − indica "resta o diferencia".

El signo × ó · indica "producto o multipiicación".

El signo _ ó : indica "cociente o división".

TEMA 2

GENERALIDADES SOBRE CONJUNTOS

INDICE

1.–CONCEPTO DE CONJUNTO.
2.–FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO.
   A.–Por extensión.
   B.–Por comprensión.
3.–RELACIONES POSIBLES ENTRE DOS CONJUNTOS.
   A.–Conjuntos iguales.
   B.–Subconjuntos. Inclusión.
   C.–Conjuntos solapados.
   D.–Conjuntos disjuntos.
4.–COTAS DE UN CONJUNTO.
   A.–Conjunto Universal.
   B.–Conjunto vacio.
5.–CONJUNTOS PARTICULARES.
6.–CONJUNTO DE LAS PARTES.
7.–PARTICION DE UN CONJUNTO.
8.–CUANTIFICADORES.
9.–DIAGRAMAS DE VENN.

TEMA 2

Los pastores de la antiguedad utilizaban piedras de rio redondeadas para contar sus ovejas o sus cabras. Por la mañana, echaban una piedra en un cesto o recipiente apropiado por cada animal que salia por la puerta del redil. Por la noche sacaban del mismo cesto una piedra por cada animal que entraba por la misma puerta.

1.—CONCEPTO DE CONJUNTO

La idea de conjunto es una idea primaria e intuitiva, que el sentido común, de por sí solo, nos define.

En general, un conjunto viene expresado por una agrupación de elementos tal, que todos ellos participan, en cierto modo, de las mismas características o propiedades.

Así pues, orientaremos el concepto de conjunto como un concepto lógico no definido.

Los conjuntos, en su más amplio sentido, pueden ser: **finitos** (poseen una cantidad finita de elementos) o **infinitos** (poseen una cantidad infinita de elementos).

Ej.:

— El conjunto de las hojas de un libro.
— El conjunto de los alumnos universitarios.

Ej.:

— El conjunto de puntos de una recta.
— El conjunto de los números pares.

A los conjuntos los representaremos siempre con letras mayúsculas (A, B, C, ...) y a los elementos de los conjuntos con letras minúsculas (a, b, c, ...) excepto cuando tales elementos sean numéricos, que no existe posibilidad de representarlos de forma mayúscula o minúscula.

Usualmente, a los elementos de un conjunto se les representa encerrados entre dos llaves.

Ej.: A = {a, b, c,}. Obsérvese cómo el conjunto finito A está formado por los elementos a, b y c.

Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el signo $\in$ que se lee: "pertenece a" o "está contenido en".

Cuando queramos indicar que un elemento no pertenece a un

conjunto, utilizaremos el signo $\notin$ y leeremos: "no pertenece a" o "no está contenido en".

Ej.: Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Podemos decir que:

$a \in A$ (el elemento a "pertenece a" el conjunto A).

$d \notin A$ (el elemento d "no pertenece a" el conjunto A).

NOTA.—Cuando utilizamos conjuntos, debemos tener en cuenta las siguientes premisas:

— Salvo que se diga lo contrario, de un conjunto no nos interesa conocer la "cantidad" (cardinal) de sus elementos.

Lo importante, de momento, es conocer la "calidad" de sus elementos, es decir, cómo son.

Ej.: Del conjunto $A = \{a, b, c\}$ inicialmente no nos interesa saber que posee tres elementos, sino que sus elementos son el a, b y c.

— De la premisa anterior podemos deducir que en los conjuntos no tiene ningún interés el repetir los elementos, ya que en definitiva se trataría del mismo conjunto.

Ej.: Los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $A = \{a, b, c, c\}$ son el mismo conjunto.

— En cualquier conjunto, el "orden" (ordinal) que tengan sus elementos es indiferente.

Dos conjuntos con los mismos elementos en distinto orden, representan al mismo conjunto.

Ej.: Los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $A = \{b, c, a\}$ son el mismo conjunto.

NOTA.—En la teoría de conjuntos es frecuente utilizar el símbolo $\Rightarrow$ que se lee: "implica", "de lo que se deduce", "se sucede", etc.

Ej.: Si el conjunto A es: $A = \{a, b, c\}$ esto implica que el elemento a pertenece al conjunto A.

Lo expondríamos así: $A = \{a, b, c\} \Rightarrow a \in A$.

2.—FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO

Un conjunto estará perfectamente determinado cuando se posea cualquier criterio que nos permita decidir si un elemento pertenece o no al conjunto en cuestión.

Los conjuntos se pueden definir de dos formas:

A.—Por extensión

Consiste en citar todos y cada uno de los elementos de los que consta el conjunto.

Generalmente se utiliza esta forma cuando la cantidad de elementos del conjunto es reducida.

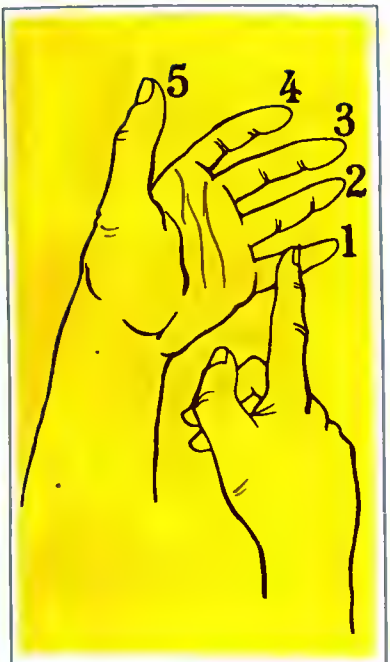
Ej.: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

LOS NUMEROS

En las transacciones comerciales antiguas se tuvo que inventar algo que sirviera de medida para contar. Los griegos empleaban los dedos de la mano para hacer un sistema, creando el número 1 como símbolo o razón de todos los números, hasta el número 5. Los antiguos pueblos galos tomaron como base el número 20. El árabe, el número 10 (o sea los dedos de dos manos) y este sistema decimal es el que se sigue hoy día en todos los pueblos de la Tierra.

A todos los números se les fue dando un símbolo adecuado según cada civilización. Reunidos estos símbolos, tuvo lugar el sistema de numeración que fue sujeto a ciertas reglas.

Modernamente se ha usado en algunos países el número 12 como base (docena, gruesa etc.) y aunque aún tiene vigencia comercial en las transacciones, esta medida tiende a desaparecer.



Los primeros elementos para calcular (y que hoy día es empleado por gran cantidad de seres humanos) fueron —y son sin duda— los dedos de las manos; es más el sistema decimal está basado en ello: en los diez dedos y en sus múltiplos.

Cuando el hombre ya dominó en alguna forma las operaciones matemáticas elementales valiéndose del ábaco o de algún artilugio parecido para contar, sumar, restar (y hasta multiplicar y dividir), le fue muy necesario representar gráficamente esas operaciones.

Se puede considerar que el nacimiento de la escritura estuvo en un principio definido por una clase de contabilidad —propia de cada tribu o pueblo— que les permitió comerciar entre ellos.

B.– Por comprensión

Consiste en exponer una propiedad común a todos los elementos del conjunto.

La propiedad común se puede expresar mediante cualquier frase que defina con claridad y lo más escuetamente posible a todos los elementos del conjunto.

También dicha propiedad común se puede exponer mediante una expresión matemática.

Generalmente se utiliza esta forma cuando la cantidad de elementos del conjunto es amplia.

Ej.: A = {es el conjunto de los números pares positivos menores de mil}.

Abreviadamente:

A = {números pares positivos menores de mil}.

Más abreviadamente:

A = {pares positivos menores de mil}.

En forma matemática:

$A = \{x \in \text{Pares}, 0 < x < 1000\}$.

Ej.: Definir por extensión y por comprensión el conjunto de los divisores positivos de 10.

– Por extensión: {1, 2, 5, 10}.

– Por comprensión: {divisores positivos de 10}.

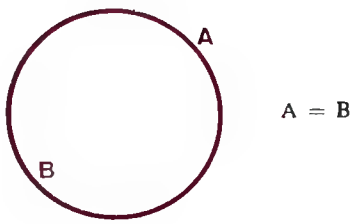
3.–RELACIONES POSIBLES ENTRE DOS CONJUNTOS

Vamos a estudiar qué posturas pueden adoptar dos conjuntos entre sí, teniendo en cuenta los elementos que los componen:

A.–Conjuntos iguales

Dados dos conjuntos, A y B, diremos que son iguales cuando poseen los mismos elementos. Y lo representaremos con el símbolo = (A = B).

Si los conjuntos A y B son distintos, lo representaremos con el símbolo ≠ (A ≠ B).



Ej.: Los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {1, 2, 3} son obviamente iguales (A = B).

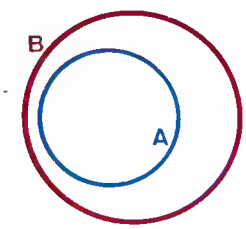
B.–Subconjuntos. Inclusión

Dados dos conjuntos, A y B, diremos que A "es subconjunto" de B o que A "está incluido en" B, cuando todos los elementos de A están contenidos en **B** y no a la inversa:

Y lo representaremos con el símbolo $\subset$ ($A \subset B$).

Cuando ocurra que no todos los elementos de A están incluidos en B, podemos simbolizar por $\not\subset$.

Gráficamente expuesto:



$A \subset B$

Con ánimo de manejar simbolos, obsérvese que:

– $A \subset B = B \supset A$

– $A \subset B = B \not\subset A$

Ej.: Los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {1, 2, 3, 4, 5}.

Están relacionados por inclusión, $A \subset B$.

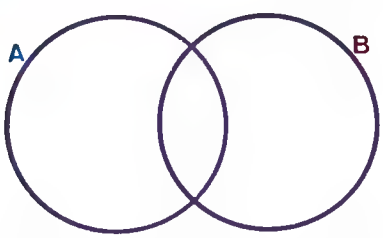
Cuando entre dos conjuntos, A y B, se verifica cualquiera de las relaciones $A \subset B$ o bien $B \subset A$, se dice que los conjuntos A y B son **comparables**.

Obsérvese que la relación $A \subset B$ no excluye la posibilidad de $A = B$, esto ocurriría cuando siendo $A \subset B$, también fuese $B \subset A$.

En el caso de que $A \subset B$ y $B \not\subset A$, se dice que la inclusión de A es **estricta** y que A es un subconjunto **propio** de B.

C.–Conjuntos solapados

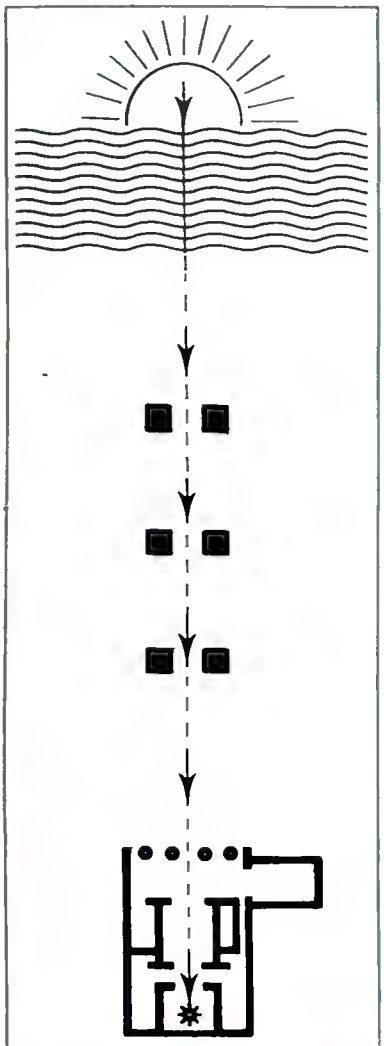
Son aquellos conjuntos que poseen algún elemento común.



Ej.: Los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {3, 4, 5} son solapados (tienen algún elemento común, como el 3).

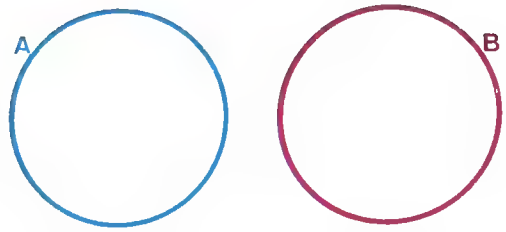
En las orillas del rio Tigris, unos 3.000 años a. de C., se desarrolló la cultura sumeria. Parece muy probable que la invención de la escritura date de esta época, pues los documentos escritos más antiguos se hallan en lenguaje sumerio. En ellos se encuentran símbolos numéricos. Más tarde el uso de la escritura uniforme se extendió a otros pueblos.

La tablilla de arcilla en la que se grababan con palos apropiados las diferentes cantidades, estuvieron vigentes durante miles de años.



D.—Conjuntos disjuntos

Son aquellos conjuntos que
común.



Ej.: Los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {4, 5} son disjuntos (no tienen ningún elemento común).

Ej.: Si el conjunto A no está incluido en el conjunto B, qué relaciones son posibles entre A y B.

Pueden ser:

– A y B solapados.
– A y B disjuntos.
– B ⊂ A.

4.—COTAS DE UN CONJUNTO

A.—Conjunto Universal

Es aquel conjunto que contiene por lo menos a todos los conjuntos de un problema concreto.

Cada problema en cuestión, posee su conjunto Universal.

Se representa por U.

Debemos considerar que entre todos los subconjuntos posibles de U, se encuentre el propio U.

Ej.: Si U es el conjunto de todos los números enteros, A puede ser el conjunto de todos los números impares.

Ej.: Si A = {1, 2, 3} y B = {3, 4, 5} el conjunto U puede ser U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

B.—Conjunto vacío

Es aquel conjunto que no posee ningún elemento.

Debemos considerar que el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos.

El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo.

Se representa de las siguientes formas 0, ϕ, { }.

Cualquier conjunto A, estará vinculado siempre a U y ϕ por la relación $\phi \subseteq A \subseteq U$, por ello U y ϕ reciben el nombre de cotas de un conjunto cualquiera.

5.–CONJUNTOS PARTICULARES

La teoría de conjuntos, evidentemente se aplica al campo numérico. Por ello, existen unos determinados conjuntos de números, que adquieren una importancia capital y cuya simbología y contenido es necesario conocer. Son los siguientes:

– N (conjunto de los números naturales).

$N = \{0, 1, 2, 3...\}$.

– N^* (conjunto de los números naturales sin el cero).

$N^* = \{1, 2, 3...\}$.

– Z (conjunto de los números enteros).

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,...\}$.

– Q (conjunto de los números racionales).

$Q = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{5}{2},...\}$.

– Q^+ (conjunto de los números racionales positivos).

$Q^+ = \{0, 1, 2, \frac{5}{2},...\}$.

– Q^- (conjunto de los números racionales negativos).

$Q^- = \{0, -1, -2, -\frac{5}{2},...\}$.

– R (conjunto de los números reales).

$R = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{5}{2}, \pm \sqrt{2},...\} = \{$todos los números que existen$\}$

– R^+ (conjunto de los números reales positivos).

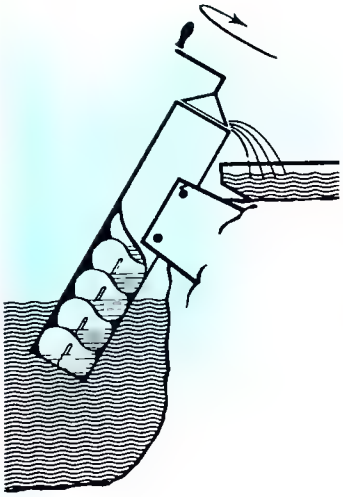
$R^+ = \{0, 1, 2, \frac{5}{2}, \sqrt{2},...\}$.

Los egipcios empleaban sus conocimientos matemáticos y astrológicos para impresionar a los fieles de las diversas divinidades. Como norma común, muchos de sus templos estaban situados a la orilla del gran río Nilo padre de todas las divinidades y su puerta principal orientada hacia el sol saliente, de forma que, una muy estudiada colocación de sus entradas y galerías, permitía que al salir el Sol, cuando sus primeros rayos estaban paralelos a la Tierra, iluminasen durante unos momentos y de forma muy intensa, el punto sagrado del altar.

Este momento cumbre en los cultos diarios, era interpretado como signo favorable de la divinidad hacia los hombres de aquella región.

En Madrid podemos contemplar un templo que suma estas características y que fue edificado en el siglo IV a. de J.C. Estaba dedicado al dios Amón. Nos referimos al templo de Debod.

Se pueden contemplar dos pilonos o puertas exteriores –de las tres que tuvo en su construcción original – y un corredor central que lleva directamente al fondo del santuario, lugar donde, según la tradición, la diosa Isis dio a luz a Horus.



Los griegos son de los primeros en aplicar sus cálculos en aparatos que de alguna manera sirvieran para ahorrarles trabajo.

Estudiaron los fenómenos naturales que les rodeaban y crearon sistemas prácticos, como el tornillo de Arquímedes, que les servía para subir agua del cauce de los ríos hasta las acequias de riego situadas en lo alto de las orillas. Esta forma de riego se sigue utilizando hoy en día en muchos países, tal y como se realizaba hace veintitrés siglos.

También forma parte este mecanismo de las grandes máquinas que transvasan productos en polvo (cemento, yeso) o en grano como cereales, trigo, cebada.

El sistema consiste en un cilindro hueco en cuyo interior está montado longitudinalmente en helicoide o tornillo que gira sobre su eje por medio de una manivela o motor. Sumergido la parte inferior en el líquido, al dar vueltas, el tornillo produce un efecto de traslación ulterior, que obliga a ir subiendo hacia la parte superior por donde vierte al exterior

— R^- (conjunto de los números reales negativos).

$$R^- = \{0, -1, -2, -\frac{5}{2}, -\sqrt{2}, ...\}.$$

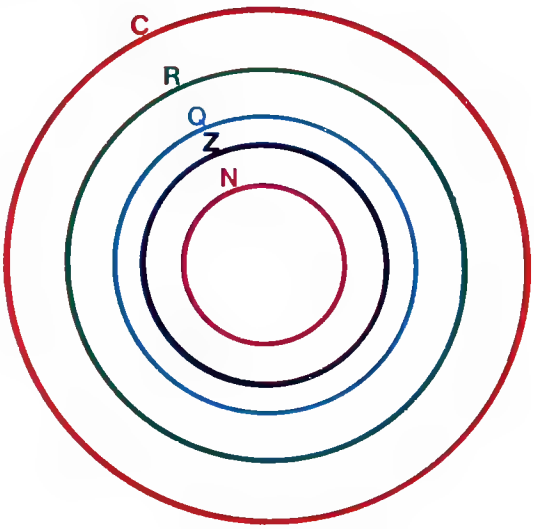
— C (conjunto de los números complejos).

$$C = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{-3}, ...\}.$$

NOTA. En todos los conjuntos particulares se ha intentado poner una muestra representativa del contenido numérico de cada uno.

Obsérvese cómo el desarrollo de los conjuntos particulares se ha ido formando a través de la evolución del concepto de número.

Para ver más claramente esta evolución, vamos a relacionar los conjuntos particulares por inclusión.



$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Obsérvese en el gráfico que al conjunto C se le puede considerar como conjunto universal de todos los números.

6.—CONJUNTO DE LAS PARTES

Dado un conjunto A, llamaremos conjunto de las partes de A, al conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de A, incluido el propio conjunto A y el conjunto vacío.

Se representa por P (A).

La cantidad total de subconjuntos de A o de elementos de P (A) se puede obtener aplicando la expresión 2^n, donde n es la cantidad de elementos del conjunto A.

Ej.: Hallar el conjunto de las partes de A = {a, b, c}.

P (A) = { {a} {b} {c} {a, b} {a, c} {b, c} {a, b, c} { } }

n.º de elementos de P (A) = $2^n = 2^3 = 8$ elementos o subconjuntos de A.

Ej.: Razonar si es posible que un conjunto P (A) posea 15 elementos.

No es posible, porque 2^n siempre es un número par, cualquiera que sea $n \in N$.

7.–PARTICION DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto A, llamaremos partición de A, a cualquier conjunto, formado por subconjuntos de A, que reúnan las dos condiciones siguientes:

– Todos los subconjuntos de A, deben ser disjuntos entre sí.

– Entre todos los subconjuntos de A, deben cubrir o contener al conjunto A.

Ej.: Dar dos particiones diferentes de A = {a, b, c}

$\{\{a, b\}\ \{c\}\}$ y $\{\{a\}\ \{b\}\ \{c\}\}$

NOTA.–No se debe confundir: conjunto de las partes de A con partición de A. Obsérvese en los dos casos las diferencias importantes que los distinguen.

8.–CUANTIFICADORES

Son simbolismos que se utilizan en la teoría de conjuntos con el objeto de reducir frases o expresiones. Pueden ser de dos tipos:

A) [redacted] Se representa por $\forall$ y se lee "para todo".

Ej.: $\forall x \in N$, leeríamos "para todo elemento x, perteneciente al conjunto de los números naturales N".

B) [redacted] Se representa por $\exists$ y se lee "existe al menos".

Ej.: $\exists x \in R$, leeríamos "existe al menos un elemento x, perteneciente al conjunto de los números reales **R**".

9.–DIAGRAMAS DE VENN

Son representaciones gráficas que se utilizan en la teoría de conjuntos con el objeto de facilitar las soluciones de los problemas y hacer más intuitivas las cuestiones que generan.

En general, al conjunto Universal del problema se le suele representar mediante un rectángulo y a los subconjuntos de éste, mediante círculos o elipses.

Llegado el momento de dibujar un diagrama de Venn, es conveniente antes estudiar detenidamente la composición de los subconjuntos de U, para hacerse una idea de la posición que van a tomar entre sí.

Los papiros fueron unas láminas obtenidas del tallo de esta planta que emplearon los egipcios para escribir en ellos. Los papiros más antiguos que se conocen corresponden a la V dinastía (3.000 años antes de C.) y están redactados en caracteres hieráticos dispuestos en columnas verticales.

Entre los más antiguos, se encuentra al papiro de Ahmes que contiene ochenta problemas de álgebra con sus soluciones correctas.

La escritura horizontal se impuso durante la XII dinastía (sobre el año 2.000 antes de C.).

Entre estos últimos se encuentra el papiro de Ajmin, último vestigio de la matemática egipcia.

LOS CALCETINES

Mi padre es un hombre muy desordenado, tiene en un cajón 12 pares de calcetines y, de ellos, la mitad son azules y la otra mitad rojos.

Cuando se encontraba totalmente vestido para ir al teatro y con sus zapatos en la mano, se fue la luz... sin coger los calcetines.

Gran aficionado a las matemáticas, no se equivocó en la elección, ya que sabía cuántos calcetines mínimos tenía que tomar para tener un par igual. ¿Cuántos tuvo que coger?

SOLUCION

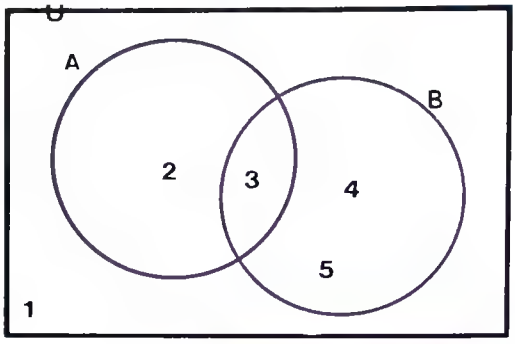
Con tres calcetines sabía que tenía un par igual, ya que le daba lo mismo un color que otro.

Cálculo de posibilidades:
Rojo, rojo, rojo/azul, azul, rojo.
Rojo, rojo, azul/azul, azul, azul.

Así tenía siempre un par correcto.

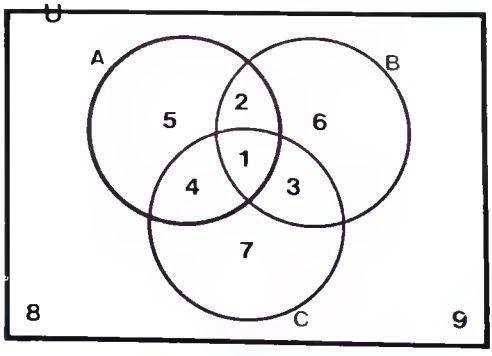
Ej.: Representar en un diagrama de Venn los conjuntos siguientes:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$



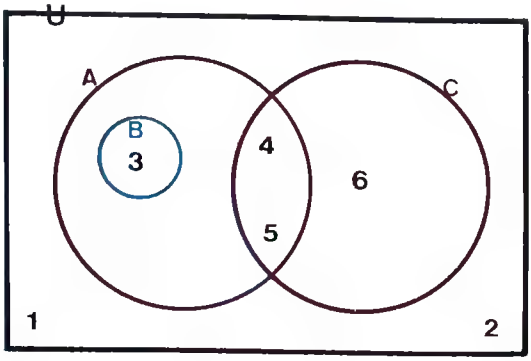
Ej.: Representar en un diagrama de Venn los conjuntos siguientes:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $A = \{1, 2, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3, 6\}$ y $C = \{1, 3, 4, 7\}$.



Ej.: Representar en un diagrama de Venn los conjuntos siguientes:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{3, 4, 5\}$ $B = \{3\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$



TEMA 3

OPERACIONES CON CONJUNTOS

INDICE

1.–UNION DE CONJUNTOS.

2.–INTERSECCION DE CONJUNTOS.

3.–COMPLEMENTACION DE CONJUNTOS.

4.–DIFERENCIA DE CONJUNTOS.

5.–SUMA BOOLEANA O DIFERENCIA SIMETRICA.

6.–FORMAS GENERALES DE OPERAR CON CONJUNTOS.

- A.–Operativa corriente.
- B.–Operativa por diagramas de Venn.
- C.–Operativa por pertenencias.

7.–NUMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO. CARDINAL DE UN CONJUNTO.

TEMA 3

Sobre el año 654 antes de C. los cartagineses fundan una colonia en la isla de Ibiza.

Los cartagineses, dotados para el comercio y la navegación, explotaron toda la zona del Mediterráneo. Siendo rivales directos de Roma, forzosamente tenían que rozar sus intereses, esto fue origen de un conflicto que duró cien años y que se conoce como guerras púnicas.

A partir de su implantación en Ibiza, se extendieron por todo el sur de nuestra península. Fueron grandes comerciantes y tuvieron que emplear todos los sistemas de cálculo y aritmética que ya se conocían. Aunque no han pasado a la historia por ninguna gran aportación en este sentido.

La pérdida total de España para Cartago fue la consecuencia de la victoria de Roma en la segunda guerra púnica

OPERACIONES CON CONJUNTOS

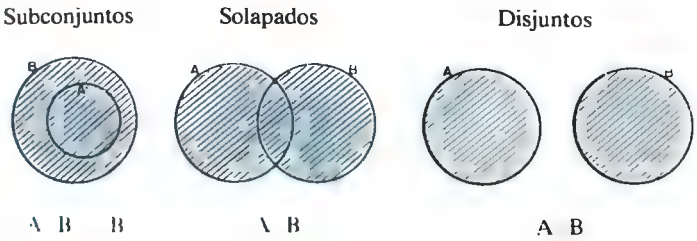
Estudiaremos en este capítulo los procesos operativos que nos permitan obtener nuevos conjuntos, a partir de otros dados.

1.—UNION DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, llamaremos unión de ambos a otro conjunto que está formado por todos los elementos de A y B.

Y lo representaremos con el símbolo U (AUB).

Vamos a estudiar la operación con las tres posibilidades de relacionar dos conjuntos.



NOTA. Téngase en cuenta que en los conjuntos no se repiten los elementos.

Ej.: Hallar la unión de los conjuntos A = |1, 2, 3, 4| y B = |2, 3|

AUB = |1, 2, 3, 4|

Ej.: Hallar la unión de los conjuntos A = |1, 2, 3| y B = |2, 4, 5|

AUB = |1, 2, 3, 4, 5|

Ej.: Hallar la unión de los conjuntos A = |1, 2, 3| y B = |4, 5, 6|

$A \cup B = |1, 2, 3, 4, 5, 6|$

Ej.: Hallar la unión de los conjuntos $A = |1, 2|$, $B = |1, 2, 3|$ y $C = |4, 5|$

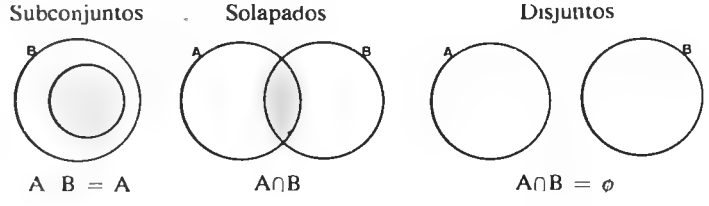
$A \cup B \cup C = |1, 2, 3, 4, 5|$

2.–INTERSECCION DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, llamaremos intersección de ambos, a otro conjunto, que está formado por los elementos comunes de A y B.

Y lo representaremos con el símbolo ∩ ($A \cap B$).

Vamos a estudiar la operación con las tres posibilidades de relacionar dos conjuntos.



Ej.: Hallar la intersección de los conjuntos $A = |1, 2, 3|$ y $B = |1, 2|$

$A \cap B = |1, 2|$

Ej.: Hallar la intersección de los conjuntos $A = |1, 2, 3|$ y $B = |3, 4, 5|$

$A \cap B = |3|$

Ej.: Hallar la intersección de los conjuntos $A = |1, 2, 3|$ y $B = |4, 5, 6|$

$A \cap B = o$

Ej.: Hallar la intersección de los conjuntos $A = |1, 2, 3|$ $B = |2, 4|$ y $C = |2, 5|$

$A \cap B \cap C = |2|$

Ej.: Hallar la intersección de los conjuntos $A = |1, 2, 3|$ $B = |2, 4|$ y $C = |5, 6|$

$A \cap B \cap C = o$.

3.–COMPLEMENTACION DE CONJUNTOS

En general, llamaremos complementario de un conjunto A respecto de otro B, al conjunto formado por los elementos del segundo conjunto B que no pertenecen al primer conjunto A.

Para poder realizar esta operación es necesario que el conjunto del que deseamos hallar su complementario sea subconjunto del segundo conjunto B.

COMO MULTIPLICAN ALGUNOS ARABES

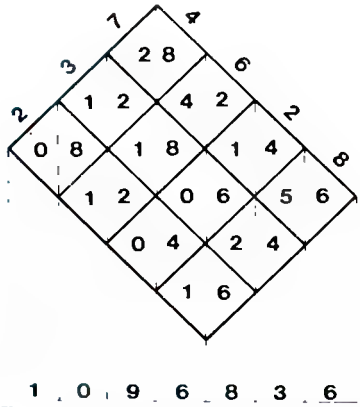
Primero, se confecciona un rectángulo y se divide en tantos cuadrados como cifras tenga el multiplicando y el multiplicador.

Segundo, se traza la diagonal (en sentido vertical) de cada cuadrado.

Tercero, se colocan en las partes superior izquierda y derecha el multiplicando y multiplicador y cada número corresponderá a cada casilla.

Cuarto, en la reunión de cada casilla se va poniendo el resultado de la multiplicación (en la parte de la izquierda siempre las decenas, y cuando no existe decena se pone 0).

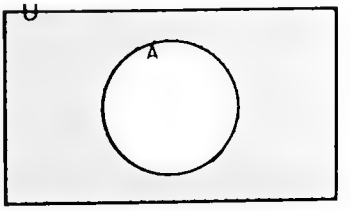
Quinto, cuando se termina de multiplicar, se van sumando todas las columnas y nos dará el resultado. Ver ejemplo.



Varrón, a quien se llegó a considerar como "el más culto de los romanos" escribió siete obras importantes que constituían una especie de enciclopedia; la primera conocida, que constituyó un antecedente muy consultado e incluso imitado en la Edad Media. En esta obra se determinaron las siete artes liberales, que sirvieron de base para determinar el proceso educativo básico, hasta casi el Renacimiento.

Las partes primera y segunda, estaban dedicadas a la Geometría y la Aritmética. En suma, Varrón organizó y sistematizó los conocimientos griegos anteriores a él, y, sin aportar grandes novedades, sirvió de base para una evolución ulterior.

Distinguiremos dos casos, que se diferencian únicamente por la forma de simbolizar al conjunto complementario:



Cuando se trata de hallar el complementario de un conjunto A, con respecto al Universal U, lo simbolizaremos de las siguientes formas: A', $\overline{A}$ o $\complement A$

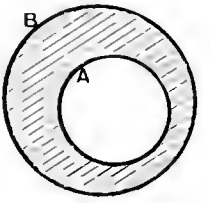
NOTA. -Si el conjunto con respecto al cual tenemos que aplicar la complementariedad no se especifica, supondremos automáticamente que es con respecto al Universal U.

Ej.: Si el conjunto U es el de los seres humanos y el conjunto A es el de los hombres, el conjunto complementario de A es:

$A' = \{\text{ser mujer}\}$.

Ej.: Dados los conjuntos $U = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$ podemos deducir que $A' = \{2, 3\}$ y $B' = \{1, 3\}$.

Ahora bien, si de lo que se trata es de hallar el complementario de un conjunto A, con respecto a otro cualquiera B, lo simbolizaremos de las siguientes formas: A'_B, $\overline{A}_B$ ó $\underset{B}{\complement} A$



Ej.: Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3\}$. Hallar A'_B y B'_A.

A'_B no existe porque A no es subconjunto de B ($A \not\subset B$) $B'_A = \{1, 2\}$.

Existen, para la operación complementariedad, unos axiomas que siempre se cumplen, cualesquiera que sean los conjuntos tratados. Imaginémonos un conjunto A y su complementario A'.

- $A \cap A' = \phi$
- $A \cup A' = U$
- $(A')' = A$

- Leyes de Morgan para la complementación. Imaginemos un conjunto A y su complementario A' y otro B y su complementario B'.

$(A \cap B) = A' \cup B'$; $(A \cup B)' = A \cap B$

Con las operaciones anteriormente expuestas ya quedaria definido el cuadro operativo necesario para cualquier álgebra de conjuntos; sin embargo, vamos a estudiar nuevas operaciones, que en realidad se podrian deducir de las anteriores, y a las que vamos a dar una manifestación particular para captarlas con más claridad.

4.–DIFERENCIA DE CONJUNTOS

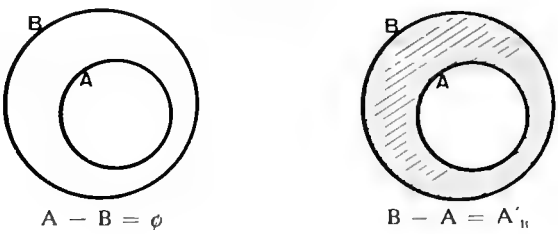
Hemos visto en la complementación, que para poder realizar tal operación, es necesario que de alguna forma los conjuntos estén relacionados por inclusión. Pues bien, cuando esto no ocurre se podria utilizar la operación diferencia de conjuntos.

Llamaremos diferencia de dos conjuntos, A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen al primer conjunto, pero no al segundo. Y lo representaremos así: A–B o B–A.

Téngase en cuenta que en la diferencia de conjuntos no es lo mismo A–B que B–A ($A-B \neq B-A$), es decir, no existe la conmutatividad.

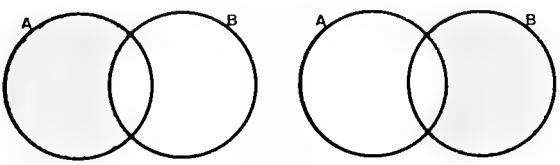
Vamos a estudiar la operación con las tres posibilidades de relacionar dos conjuntos.

Subconjuntos

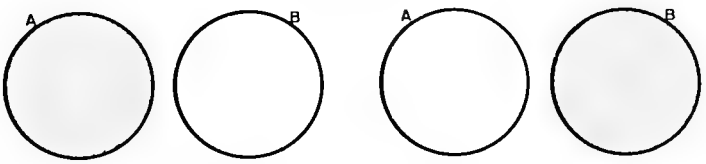


$A - B = \phi$ $\quad$ $B - A = A'_B$

Solapados $\quad$ Conexión con la complementación



Disjuntos



Ej.: Dados los conjuntos A = {a, b, c, d, e} y B = {c, d, e} se verifica que:

$A-B = \{a, b\}$

$B-A = \phi$

Los griegos emplearon gran parte de su saber en la construcción de templos dedicados a sus numerosos dioses y divinidades menores.

En estos recintos exclusivos de la divinidad, los fieles no tenían entrada y ofrecían sus sacrificios en un altar exterior.

Se componían de una gran sala con la estatua del dios, precedida de un vestíbulo, con columnas rodeándolo, y una sala posterior para guardar las ofrendas.

No empleaban para su construcción mortero ni argamasa, uniendo las piedras con grapas metálicas.

Las piedras verticales que componían los muros y las columnas eran ajustadas con gran finura y precisión hasta el punto de hacer creer algunas veces que no existía tal unión.

Ej.: Hallar A−B y B−A con los conjuntos A = |1, 2, 3, 4| y B = |4, 5|:

A−B = |1, 2, 3|

B−A = |5|

Ej.: Hallar A−B y B−A con los conjuntos A = |1, 2| y B = |3, 4|:

A−B = |1, 2| = A

B−A = |3, 4| = B

Para la operación diferencia de conjuntos, existen dos leyes de Morgan, lo mismo que ocurría en la complementariedad.

Imaginemos tres conjuntos A, B y C.

A−(B∪C) = (A−B) ∩ (A−C)

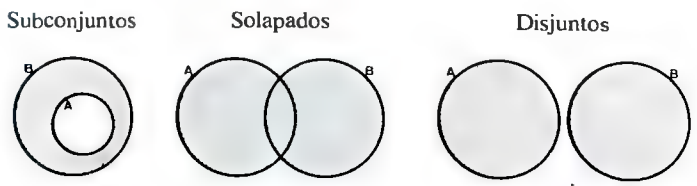
A−(B∩C) = (A−B) ∪ (A−C)

5.–SUMA BOOLEANA O DIFERENCIA SIMETRICA

Dados dos conjuntos A y B llamaremos suma booleana, o diferencia simetrica, a la que se determina por la expresión siguiente. Se representa indistintamente con + o con △.

A + B = A △ B = (A−B) ∪ (B−A)

Vamos a analizar la operación con las tres posibilidades de relacionar dos conjuntos.



A + B = B − A = A'_B A + B

Conexión con la complementación y la diferencia

A + B = A∪B

Conexión con la unión

Ej.: Con los conjuntos A = |1, 2, 3| y B = |3|, hallar A + B.

A + B = (A−B) ∪ (B−A) = |1, 2| ∪ ϕ = |1, 2| = A−B = $= A'_B$

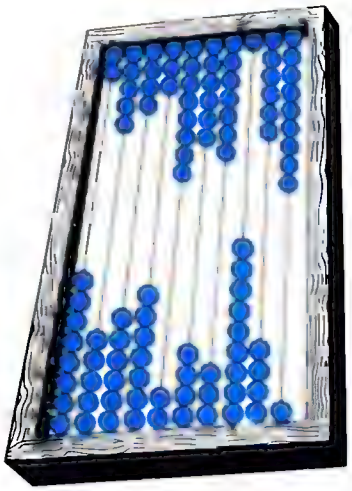
Ej.: Dados los conjuntos A = |a, b, c, d| y B = |c, d, e| hallar A + B:

A + B = (A−B) ∪ (B−A) = |a, b| ∪ |e| = |a, b, e|

Ej.: Hallar A + B con los conjuntos A = |1, 2, 3| y B = |4, 5|

A + B = (A−B) ∪ (B−A) = |1, 2, 3| ∪ |4, 5| = |1, 2, 3, 4, 5| = A∪B

NOTA.–Es conveniente que el estudioso observe la conexión que existe, en determinados casos concretos, entre todas las operaciones de conjuntos expuestas.



Desde que se empezó a comerciar, el Abaco en sus diferentes formas fue la calculadora de la época.

Los romanos emplearon uno, consistente en una plancha de madera, barro, piedra o mármol con rebordes alrededor. Extendían sobre el hueco una tonga de arena fina y en ella tomaban apuntes o ajustaban cuentas: los calculadores y tabularios.

Posteriormente se desarrolló el modelo que se usó hasta el siglo XII, que fue desplazado por el sistema de numeración árabe. Este modelo consiste en un bastidor de madera rectangular, con diez alambres dispuestos horizontalmente por cada uno de los cuales pueden correr diez cuentas. El alambre inferior corresponde a las unidades simples; el segundo a las decenas, el tercero a las centenas y así sucesivamente. Un alambre sin correr ninguna cuenta equivale al cero.

En la Edad Media, la palabra Abaco era sinónimo de aritmética

6.–FORMAS GENERALES DE OPERAR CON CONJUNTOS

En este apartado vamos a estudiar las formas diversas a través de las cuales es posible efectuar operaciones con conjuntos.

A.–Operativa corriente

Se utiliza cuando los conjuntos motivo de operaciones nos los dan expresados con todos y cada uno de sus elementos. Esta forma de operar es la que se ha venido exponiendo a lo largo de todas las operaciones de conjuntos ya citados.

Ej.: Dados los conjuntos:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{2, 3\}$

$B = \{2\}$

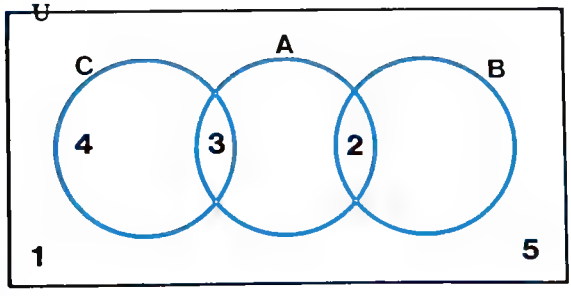
$C = \{3, 4\}$

Se pide: a) Representarlos en un diagrama de Venn. b) Definir por extensión los conjuntos siguientes:

$A \cup B$	$(A \cap B) - C'$
$B \cap C$	B'_A
$(A-B)'$	$B + C$

Vamos, pues, a solucionar los apartados del problema:

a)



b) $A \cup B = \{2, 3\}$

$B \cap C = \{\ \}$

$(A-B)' = \{3\}' = \{1, 2, 4, 5\}$

$(A \cap B) - C' = \{2\} - \{3, 4\}' = \{2\} - \{1, 2, 5\} = \{\ \}$

$B_A = \{3\}$

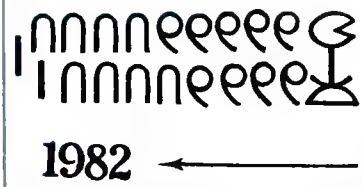
$B + C = (B-C) \cup (C-B) = \{2\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$

La lucha de los primeros hombres con la Naturaleza debió ser terriblemente dura: estaban desnudos, tenían frío y todavía no conocían el fuego que los calentara; las fieras los acosaban y no tenían armas con que defenderse. El hambre sólo podían saciarla plenamente en algunas épocas del año en que las frutas estaban en sazón y podían comerlas; el resto del año tenían que cazar. Así, una de sus grandes preocupaciones fue proveerse de armas. Lo que no ofrece duda es que antes de aprender a fabricarlas buscó y seleccionó objetos naturales, piedras o guijarros puntiagudos, huesos largos, ramas gruesas, etc.; más tarde, y en base a esta experiencia, ya supo calcular en cierto modo qué volumen o qué grueso necesitaba para defenderse de cada animal o para cazarlo.

Henry Rhind, estudiante escocés y aficionado a las antigüedades, encontró en la ciudad de Tebas dos rollos de papiro egipcio que son los documentos más antiguos conocidos; se cree que fueron escritos 2.000 años antes de Cristo. Contienen una colección de problemas que aún hoy en día son dificilísimos de solucionar.

Estos papiros están escritos en jeroglíficos, y se conservan, uno en el British Museum y el otro en el Museo de Ciencia de Moscú.

Los egipcios utilizaron un sistema de numeración de base decimal; los múltiplos de 10 tenían representaciones particulares que son el equivalente a nuestros números del 1 al 9. Así, para escribir en caracteres egipcios el año 1982, se pondría a la derecha el símbolo de mil, seguido por nueve símbolos de cien, ocho de diez y dos unidades.

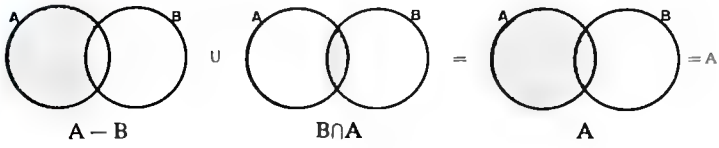


B.—Operativa por diagramas de Venn

Se utiliza cuando los conjuntos, motivo de operaciones, nos los dan sin elementos en forma general.

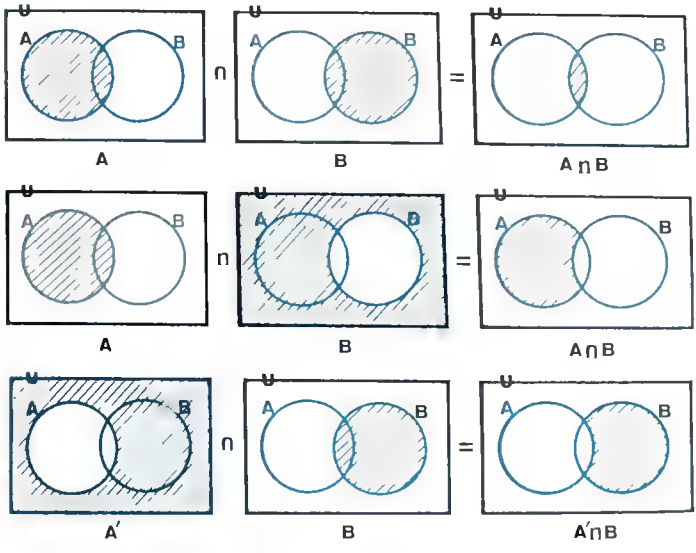
Ej.: Hallar el resultado de la operación: $(A-B) \cup (B \cap A)$:

Como en la expresión dada no aparecen conjuntos complementarios, no es necesario utilizar, en este caso, el conjunto Universal, en los diagramas de Venn. Dibujaremos los conjuntos A y B, en su forma más general.

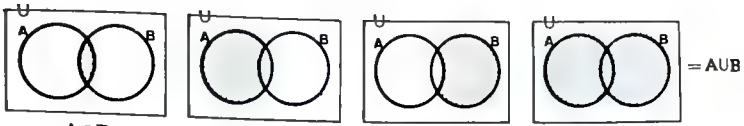


Ej.: Hallar el resultado de la operación $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$:

Como en la expresión dada aparecen complementarios, será conveniente utilizar el Universal en los diagramas de Venn, vamos a hacer el problema despacio y por partes para que no existan conflictos, eligiendo inicialmente cada uno de los paréntesis.

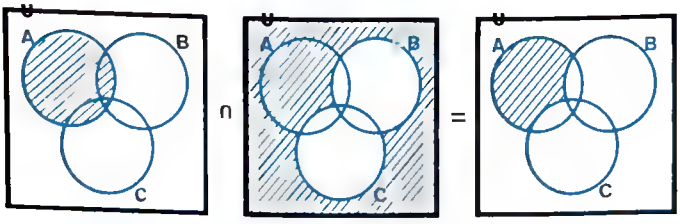


Obsérvese cómo hemos localizado la solución de cada paréntesis de la expresión; a continuación, según indica la operación, tenemos que efectuar la unión de todos los resultados de los paréntesis, que sea la solución final.



$A \cap B$ $A \cap B'$ $A' \cap B$ $A \cup B$

Ej.: Representar en un diagrama de Venn, la parte rayada, correspondiente a la operación: $A \cap (B \cup C)'$.



A $(B \cup C)'$ $A \cap (B \cup C)'$

C.—Operativa por pertenencias. Esta forma de operar conjuntos exige una gran atención para poder desarrollar con éxito los razonamientos, y un gran dominio de las operaciones.

Ej.: Hallar el resultado de la siguiente operación: $B - (A \cap B)$. Inicialmente se propone que un elemento x pertenece a un conjunto cualquiera. $(x \in B)$.

$$\text{Si } x \in B \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (B - A)$$

$$B - (A \cap B) = B - A$$

Ej.: Demostrar la igualdad $(A \cap B) \cup (A' \cap B') = U$

En este tipo de problemas, que nos propongan demostrar una igualdad, se procede generalmente de la siguiente forma: Se elige uno de los miembros, generalmente el más denso, y si operando en él, llegamos al segundo miembro, habremos conseguido nuestro propósito. Hay veces que hay que operar simultáneamente en los dos miembros para poder llegar a la certeza de la igualdad.

En este caso, operaremos en el primero.

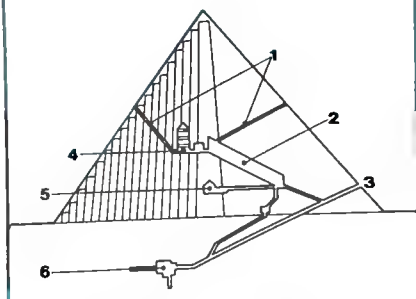
$x \in A \Rightarrow x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in B$, luego

$x \notin A'$ y $x \notin B' = x \notin (A' \cap B')$, luego

$x \in (A \cap B) \cup (A' \cap B') \Rightarrow x \in U$

7.—NUMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO. CARDINAL DE UN CONJUNTO

Hasta ahora, en todas las operaciones de conjuntos, nuestro interés se había manifestado en el sentido de diferenciar la calidad (cómo son) de los elementos de los conjuntos, pues bien, nuestro interés ahora se va a volcar en localizar la cantidad (cuántos son) de elementos de los conjuntos que originaban aquellas operaciones.



1. Conductos de aireación.
2. Galería.
3. Entrada.
4. Cámara del rey.
5. Cámara de la reina.
6. Cámara subterránea.

PIRAMIDE DE KEOPS

La Gran Pirámide, considerada por los antiguos como una de las maravillas del mundo, tiene 150 m. de altura, midiendo su base 5 hectáreas de extensión.

El revestimiento exterior está formado por bloques enormes de piedra; algunos pesan unas 500 toneladas y miden más de 10 metros.

Es curiosa la observación de que la relación entre el perímetro de la base de la Gran Pirámide y el doble de su altura es exactamente igual a la relación de la circunferencia al diámetro, o sea, $\pi = 3{,}1416$ (pi); esto hace suponer que los egipcios ya habían encontrado esta relación.

El complicado sistema de herencia, que impone el Corán, obligó a los árabes al uso de las matemáticas, así como para resolver los problemas que surgían en los riegos agrícolas que implantaban y desarrollaban en los terrenos ocupados.

El punto de partida fue el estudio de los autores clásicos en textos que ya se habían traducido al árabe en una primera época.

En resumen, las matemáticas árabes se nutrieron de un legado cultural enriquecido por hallazgos personales que hicieron progresar los cálculos algebraicos y trigonométricos.

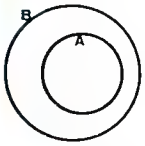
Las matemáticas fueron consideradas, por primera vez, como **ciencias autónomas.**

Hay que hacer notar, y ya lo observaremos posteriormente, que este estudio nos va a llevar a poder solucionar innumerables problemas de gran sentido práctico.

En general, dado un conjunto A, representaremos la cantidad de elementos que posee, de cualquiera de las formas: n (A) ó card (A).

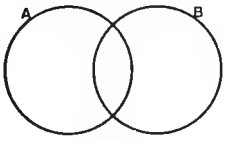
Vamos a efectuar un estudio inicial con dos conjuntos, tratando las tres posibilidades de relacionarlos:

Subconjuntos



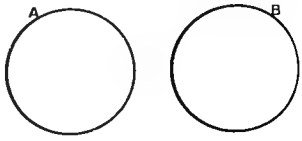
$n(A \cup B) = n(B)$

Solapados



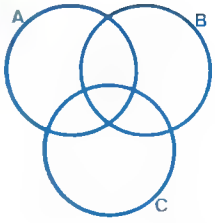
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Disjuntos

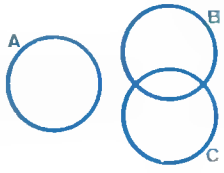


$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

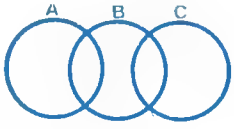
Continuamos el estudio tratando tres conjuntos en sus posturas más corrientes:



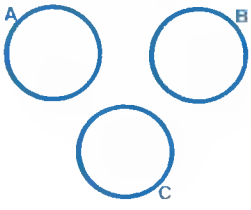
$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$



$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C)$



$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$



$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

Un estudio para cuatro conjuntos, en su caso más general y completo, con intersección común es:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$$

NOTA.—Observando las leyes de formación de los desarrollos, se podría llegar a establecer una fórmula válida para cualquier cantidad de conjuntos, que estaría determinada por la evolución propia del desarrollo y por la teoría combinatoria.

Vamos a intentar, pues, plantearla para el caso más general, con intersección común entre todos los conjuntos.

$$\begin{aligned} n(\text{unión de todos}) = &+ \Sigma\, n(\text{conjuntos de uno en uno}). \\ &- \Sigma\, n(\text{intersección de dos en dos}). \\ &+ \Sigma\, n(\text{intersección de tres en tres}). \\ &- \Sigma\, n(\text{intersección de cuatro en cuatro}). \\ &+ \Sigma\, n(\text{intersección de cinco en cinco}). \end{aligned}$$

NOTA.—El signo Σ indica suma de lo que se expresa a continuación del signo Σ.

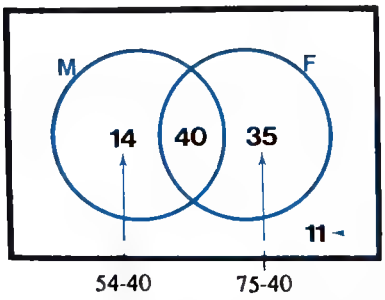
Ej.: A un examen han concurrido 100 alumnos a examinarse de Matemáticas y Física. Sabiendo que las Matemáticas la han aprobado 54 alumnos en total, la Física 75 alumnos en total y el número de alumnos que han aprobado ambas asignaturas han sido 40, hallar la cantidad de alumnos que no han aprobado ninguna asignatura.

Este problema se puede realizar con facilidad, recurriendo al diagrama de Venn, o bien, operativamente, mediante cardinales.

Mediante un diagrama de Venn

Obsérvese que los conjuntos M y F deben estar solapados, ya que según el problema existen alumnos que han aprobado Matemáticas y Física a la vez.

U = colectivo = 100 alumnos



— 100 — (14 + 40 + 35)

Luego, no han aprobado ninguna asignatura 11 alumnos.

La civilización egipcia había desaparecido totalmente y sólo se conocían algunos relatos de aquella esplendorosa civilización a través de Herodoto.

La expedición francesa de Egipto, de 1789 a 1801, despertó enorme curiosidad entre los hombres de ciencia de la época.

Los majestuosos monumentos que habían legado a la posterioridad y las ruinas que pese a los siglos transcurridos aún impresionan por su grandiosidad, hablaban claramente de una ciencia que en todos los órdenes había alcanzado muy altas cotas.

Las tumbas encontradas por dicha expedición tenían muchas inscripciones, pero no se conocía la forma de descifrarlas. Creían los investigadores que cada signo representaba una palabra entera.

Champollión consiguió una piedra encontrada por un oficial francés en la zona de Roseta y estudiándola, detenidamente, encontró que los caracteres en jeroglífico se correspondían con unas letras griegas; y supuso, como efectivamente fue así, que aquellas letras equivalían a esos signos.

Con este conocimiento y mucha paciencia pudo llegar a descifrar todo el alfabeto griego, pudiendo de esta manera llegar a leer los jeroglíficos.

Lo que denota la intensidad y la buena labor realizada por los geómetras griegos, se pone de manifiesto en el hecho de que aún en nuestros días, todo el tecnicismo geométrico está constituido por palabras de origen griego.

Lo demuestra también el hecho de que la geometría de Euclides continúa enseñándose en las escuelas y resuelve perfectamente todas nuestras necesidades en la vida práctica.

En Grecia todas las clases sociales sentían una devoción grande por cuanto significaría cultura. Con igual complacencia contemplaban la belleza de una escultura, oían los sonoros versos de su poema, que empleaban toda su inteligencia en aclarar un problema matemático.

Había llegado a tanto este culto por lo bien hecho, que en Delfos y Corinto se imponían fuertes multas a los profesionales de cualquier actividad que no ejecutaban bien sus obras.

Mediante cardinales

Aplicamos la expresión general para dos conjuntos solapados.

$n(M \cup F) = n(M) + n(F) - n(M \cap F)$

$n(M \cup F) = 54 + 75 - 40$

$n(M \cup F) = 89$ alumnos que han aprobado alguna asignatura.

Luego, no han aprobado ninguna asignatura:

$$100 - 89 = 11 \text{ alumnos}$$

Ej.: En una clase de 75 alumnos, 60 juegan al fútbol, 50 al baloncesto y 10 a ninguna de las dos cosas. Averiguar cuántos alumnos practican ambos deportes.

Los conjuntos en cuestión estarán solapados. La solucion está en la intersección de ambos.

$n(F \cup B) = N(F) + n(B) - n(F \cap B)$; $n(F \cup B) = 75 - 10 = 65$

$65 = 60 + 50 - n(F \cap B)$

$n(F \cap B) = 60 + 50 - 65 = 45$ alumnos practican ambos deportes.

Ej.: Un estudio estadístico ha arrojado los siguientes datos:

El 68 % de la población española es aficionada a los toros, y el 72 % al fútbol. Qué diríamos de los que son aficionados a los toros y al fútbol, simultáneamente.

Para resolver el problema, consideremos que a todos los españoles les gustan los toros, el fútbol o ambas cosas a la vez.

$n(T \cup F) = n(T) + n(F) - n(T \cap F)$

$100 = 68 + 72 - n(T \cap F)$

$n(T \cap F) = 68 + 72 - 100 = 40$

Al 40 % de los españoles les gustan los toros y el fútbol a la vez.

Ej.: En una encuesta realizada sobre 100 personas se ha comprobado los siguiente:

40 leen el periódico A
42 leen el periódico B
45 leen el periódico C
13 leen el periódico A y B
20 leen el periódico A y C
18 leen el periódico B y C
7 leen el periódico A, B y C

Se pide:

a) Cuántas personas no leen ninguno de los tres periódicos.

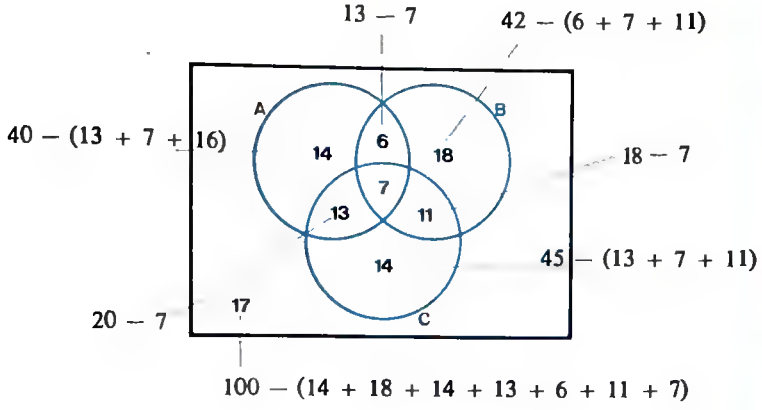
b) Cuántas personas leen únicamente el periódico A.

c) Cuántas personas leen únicamente un solo periódico.

El problema se puede realizar mediante un diagrama de Venn, o bien, operativamente, mediante cardinales.

Mediante un diagrama de Venn

Los conjuntos A, B y C estarán solapados con intersección común ya que hay personas que leen los tres periódicos.



a) 17 personas no leen ninguno de los tres periódicos.

b) 14 personas leen únicamente el periódico A.

c) 14 + 18 + 14 = 46 personas leen únicamente un periódico.

Mediante Cardinales

a) Aplicamos la expresión general para tres conjuntos solapados.

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$n(A \cup B \cup C) = 40 + 42 + 45 - 13 - 20 - 18 + 7 = 83$ personas leen algún periódico.

Luego no leen ningún periódico: 100 - 83 = 17 personas.

b) Para resolver este apartado y el siguiente, ya es conveniente dibujar el diagrama de Venn.

En el diagrama observamos que 14 personas leen únicamente el periódico A.

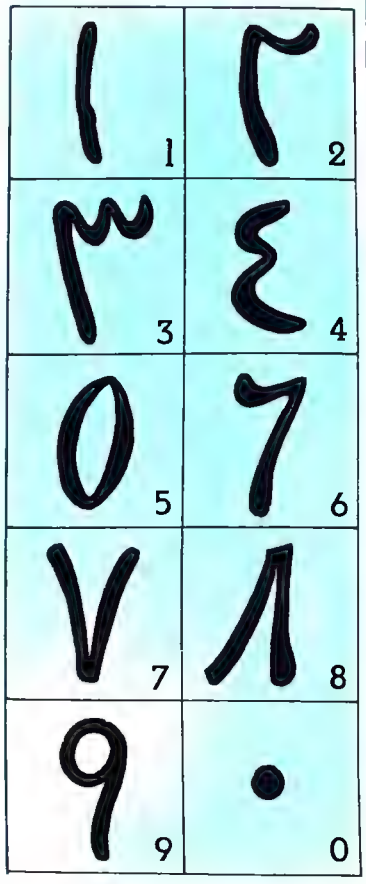
c) En el diagrama observamos que 14 + 18 + 14 = 46 personas leen únicamente un periódico.

Ej.: A una ponencia de un congreso internacional asistieron 25 personas, entre ellas había 20 militares, 12 universitarios, 17 españoles, 8 militares universitarios, 12 militares españoles y 11 universitarios españoles.

Se pide:

a) Cuántos españoles eran militares y universitarios a la vez.

b) Cuántos españoles eran militares o universitarios, pero no ambas cosas a la vez.



Los árabes escribían las cantidades con ayuda de las veinticinco letras del alfabeto.

En la Escuela de Bagdad, en el siglo IX, se desarrolló el sistema de numeración decimal de posición, que habían traído desde la India poco tiempo antes.

El perfeccionamiento de la aritmética decimal es la más notable contribución árabe a esta ciencia.

Al-Juwarjzmi compuso el primer texto sobre este tema y en él detalla nueve figuras o símbolos del 1 al 9 añadiendo el cero; con ellos y con su ley de posiciones puede representar cualquier cantidad, por grande que sea.

La escritura de las letras y de los números, siempre estuvo fuertemente influenciada por los útiles que se usaban para representarla.

Las letras fenicias tenían formas de trazo muy tosco porque eran marcadas por un cálamo o pluma muy grosera; o con yeso o carbón en madera o piedra.

La pluma de ave, cortada convenientemente por el cañón, que se usó durante tantos siglos, dio origen seguramente a la escritura gótica. La pluma de acero, inventada posteriormente, ha producido los trazos alternos de perfiles finos y gruesos de la escritura inglesa.

Hoy día, la pluma estilográfica, los bollgrafos y los rotuladores han simplificado el sistema de escribir a mano, pero ciertamente ha matado la elegancia y la belleza de los escritos que realizaban los amanuenses.

En el problema existen tres conjuntos que los vamos a designar por letras para mayor comodidad.

A = militares. B = universitarios. C = españoles.

La forma más cómoda de resolver el problema es operativamente. Aplicaremos la expresión general para tres conjuntos solapados, ya que tienen intersección común, al pedirnos en el apartado a) cuántos españoles militares universitarios hay.

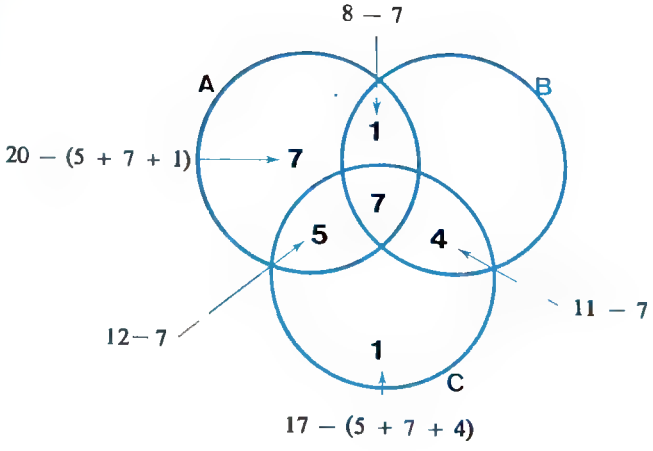
a) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$. Como lo que pide el problema es cuántos españoles militares universitarios hay, la incógnita es $n(A \cap B \cap C)$.

Luego:

$$25 = 20 + 12 + 17 - 8 - 12 - 11 + n(A \cap B \cap C)$$

$n(A \cap B \cap C) = 20 + 12 + 17 - 8 - 12 - 11 - 25 = 7$ españoles militares universitarios.

b) Para resolver este apartado recurriremos a hacer un diagrama de Venn, y lo veremos con claridad. Téngase en cuenta que de las 25 personas, todas son: militares, universitarios, españoles o de varias cosas a la vez, luego, no hace falta utilizar el conjunto Universal.

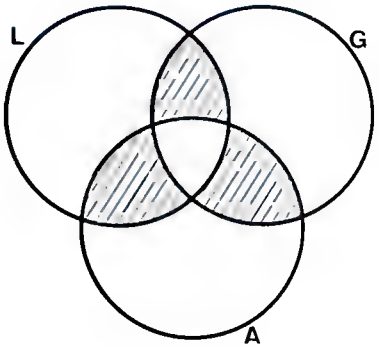


Observando el gráfico, deducimos: 5 militares españoles y 4 universitarios españoles.

Ej.: En un curso hay 40 alumnos, cada uno de los cuales está matriculado en dos, y sólo en dos, de la asignatura de Latín, Griego y Arabe. Se sabe que en Latín hay matriculados en total 33 alumnos y en Griego otros 33 alumnos. Averiguar cuántos alumnos hay matriculados simultáneamente en dos cualquiera de las tres asignaturas.

No hay duda que las posibilidades que existen es que cada uno de los 40 alumnos estudie a la vez Latín-Griego, Latín-Arabe o Griego-Arabe, conjuntos que entre sí son disjuntos, ya que cualquier alumno que esté en uno de ellos no es posible que esté en cualquiera de los otros. Además, por esa misma razón, no es posible que los tres conjuntos tengan intersección común. Vamos a resolver el problema razonada y operativamente.

Mediante razonamiento



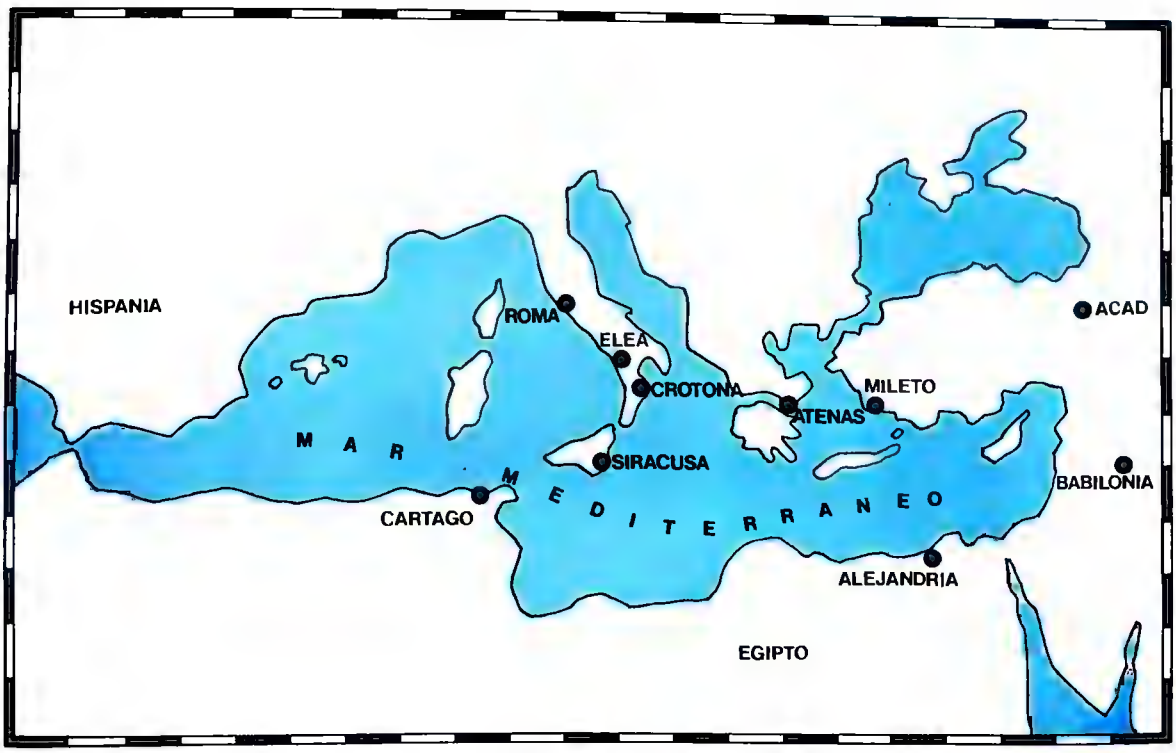
Las matemáticas inicialmente estaban desprovistas de razonamientos y faltas de las consiguientes comprobaciones. Cuando los primitivos griegos por medio de invasiones sucesivas llegaron a dominar el Sur de la península Balcánica, heredaron los conocimientos matemáticos que aquéllos habían acumulado durante siglos.

A medida que fueron afianzándose en este saber, los griegos no se contentaron con comprobar que obtenían un buen resultado, querían explicar por qué, y explicarlo del modo más breve y estrictamente lógico.

En el mapa puede verse lo que se han considerado, dentro del mundo antiguo, las zonas que por su importancia comercial y cultural iniciaron el alba de esta creación llamada Matemática.

Las ciudades en que se desarrollaron los trabajos de los matemáticos más famosos fueron: Arquímedes en Siracusa y Alejandría, Zenón en Elea, Pitágoras en Crotona, Tales en Mileto. Apolonio e Hipatia en Alejandría.

Estos hombres consiguieron sistematizar y hacer comprensible esta hermosa ciencia.



Parece que los iberos se establecieron en España unos 2.000 años antes de Cristo. Los vascos son descendientes directos de este antiquísimo pueblo, así como su idioma. Por el año 1600 antes de Cristo, los celtas ocuparon el Norte, formando luego las tribus de cántabros, astures y galaicos. Lucharon incansablemente con los iberos y al final se fundieron con ellos, formando el llamado pueblo Celtíbero. Entre el año 500 antes de Cristo y el comienzo de nuestra Era fue desarrollándose en el Sur y Este de nuestra península una incipiente cultura. En lo que hoy son Murcia y Alicante, y a juzgar por las ruinas descubiertas en las excavaciones realizadas, es donde se manifiesta con más intensidad artística. De esta época es la "Dama de Elche", bellísima escultura ibérica descubierta en el Cerro de los Santos de la ciudad que le ha dado el nombre.

En Andalucía florecieron algunos focos y es probable que ya en tan remota época se empezaran a explotar las minas de Riotinto.

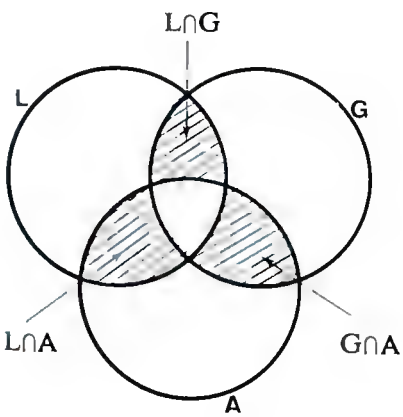
Si fuese $L \cap G = 33$, el A no podría tener intersección con L ni con G, puesto que ya dice el problema que L y G tienen 33 alumnos. Así que por tener 40 alumnos, para que el problema cuadre faltan $40 - 33 = 7$, que son los alumnos que habrá que restar a $L \cap G$ para ponerlos en las intersecciones de ésta con A.

Luego, $33 - 7 = 26$ y, definitivamente:

$L \cap G = 26$ alumnos.
$L \cap A = 7$ alumnos.
$G \cap A = 7$ alumnos.

Mediante operativa

Comenzamos con la postura lógica entre los tres conjuntos, como ya se ha razonado.



Para facilitar los cálculos vamos a llamar a: $n(L \cap G) = x$; $n(L \cap A) = y$; $n(G \cap A) = z$, y poder formalizar el siguiente sistema de ecuaciones debido a que los conjuntos en cuestión son disjuntos dos a dos.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 33 \\ x + z &= 33 \\ x + y + z &= 33 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} x &= 26 \\ y &= 7 \\ z &= 7 \end{aligned}$$

Luego las matrículas son: Latín-Griego = 26 alumnos.
Griego-Arabe = 7 alumnos.
Latín-Arabe = 7 alumnos.

TEMA 4

CORRESPONDENCIA

INDICE

1.–CONCEPTO DE PAR. DIAGRAMAS.
   A.–Diagrama cartesiano.
   B.–Diagrama de flechas o sagital.
2.–PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS.
3.–CONCEPTO DE CORRESPONDENCIA.
4.–TIPOS DE CORRESPONDENCIAS.
   A.–Correspondencia Pluriunívoca.
   B.–Correspondencia Unívoca.
5.–APLICACIONES.
6.–TIPOS DE APLICACIONES.
   A.–Aplicación suprayectiva, sobreyectiva o exhaustiva.
   B.–Aplicación inyectiva.
   C.–Aplicación biyectiva o biunivoca.
7.–RESUMEN DE CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES.
8.–CONCEPTO DE FUNCION.
9.–CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES INVERSAS.
10.–PRODUCTO DE APLICACIONES. APLICACION COMPUESTA.
11.–CLASIFICACION DE CONJUNTOS.
   A.–Conjuntos coordinables o equipotentes.
   B.–Conjunto finito.
   C.–Conjunto infinito.
   D.–Conjunto numerable.

TEMA 4

El ejército romano estaba organizado en grupos de cien hombres. Esta agrupación constituía una centuria; el jefe de ellos se llamaba centurión.

Las centurias se dividían en secciones de diez hombres cuyo jefe se llamaba decurión.

Puede verse claramente el empleo del sistema decimal y de sus múltiplos en la organización militar romana.

CORRESPONDENCIAS

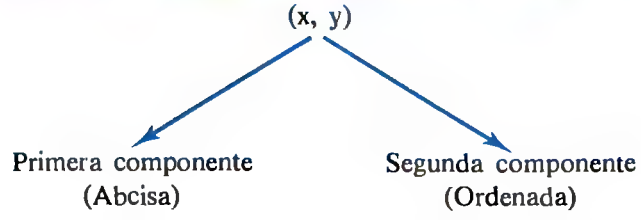
1.–CONCEPTO DE PAR. DIAGRAMAS

El concepto de par es un concepto básico y elemental. Cualquier par está formado por dos elementos (x, y) dados en un cierto orden invariable. Así el par (x, y) es distinto del par (y, x).

Ej.: Cuando asistimos a un cinematógrafo, sabemos que en la sala la posición de cada butaca está perfectamente definida. Así, cuando nuestra entrada dice (fila 7, butaca 5), sabemos identificar nuestra colocación en la sala. Sin embargo la colocación es distinta si la entrada dice (fila 5, butaca 7).

Obsérvese con este ejemplo, cómo los dos elementos que forman un par deben de estar citados en un orden predeterminado e invariable.

Pues bien, al primer elemento que forma un par se le denomina **primera componente** o **abcisa** y al segundo elemento que forma el par se le llama **segunda componente** o **ordenada**.



Ej.: Así el par (9, 4) es distinto del par (4, 9), y expresaremos $(9, 4) \neq (4, 9)$.

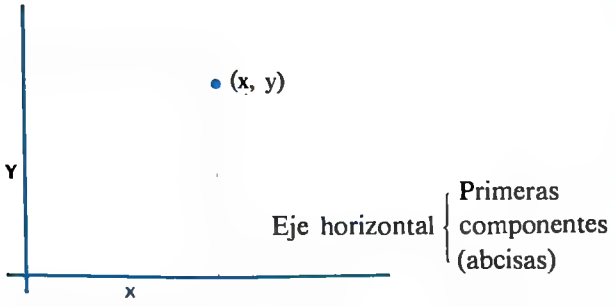
Los pares poseen un claro significado geométrico, y por esta razón vamos a intentar representarlos según las diferentes formas que existen.

A.– Diagrama cartesiano

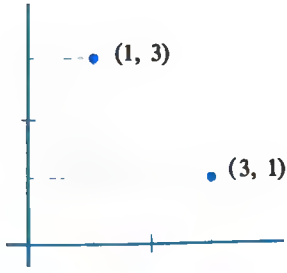
Para representar un par, por este procedimiento elegiremos dos rectas perpendiculares entre sí, llamadas ejes. Sobre la recta horizontal llevaremos siempre la primera componente del par, y sobre la recta vertical llevaremos la segunda componente del par.

Una vez situadas las primeras componentes y las segundas en los ejes respectivos, trazaremos por estos puntos dos rectas paralelas a los ejes, quedando de esta forma definido el par como la intersección de éstas.

Eje vertical { Segunda componentes (ordenadas)

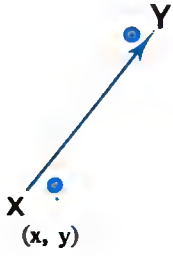


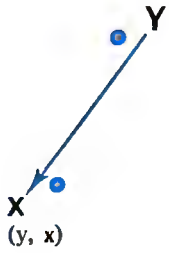
Ej.: Situar en un diagrama cartesiano los pares (1, 3) y (3, 1).

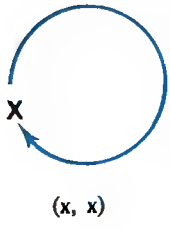


B.– Diagrama de flechas o sagital

Para representar un par, por este procedimiento pondremos en el papel las dos componentes del par de cualquier forma y trazaremos una flecha que debe tener por origen a la primera componente del par y por extremo a la segunda componente del par.







En la antigüedad se escribía utilizando el barro como soporte. En él se marcaban signos cuando estaba tierno y después se endurecía cociéndolo; más tarde fue el papiro, que inventado por los egipcios, cubrió toda una época de la escritura.

Este material, que se sacaba del tallo de la planta del mismo nombre, necesitaba un trabajo muy cuidadoso para su elaboración; se rasgaban y se pegaban unas con otras las epidermis del tallo, estando fresca aún la fibra; luego se prensaban poniéndose a secar y pulimentando por último la superficie. Para escribir en él se utilizaba una tinta que aplicaban por medio de cañas puntiagudas.

SECUENCIAS CURIOSAS

3 x 37 =	111
6 x 37 =	222
9 x 37 =	333
12 x 37 =	444
15 x 37 =	555
18 x 37 =	666
21 x 37 =	777
24 x 37 =	888
27 x 37 =	999
30 x 37 =	1110
33 x 37 =	1221
36 x 37 =	1332
39 x 37 =	1443

UN NUMERO ESPECIAL: EL 9

Le preguntamos a un amigo: Dime una cifra cualquiera, y te digo una multiplicación cuyo resultado da únicamente números de la cifra.

Vamos pues a ver cómo plantearíamos la curiosidad.

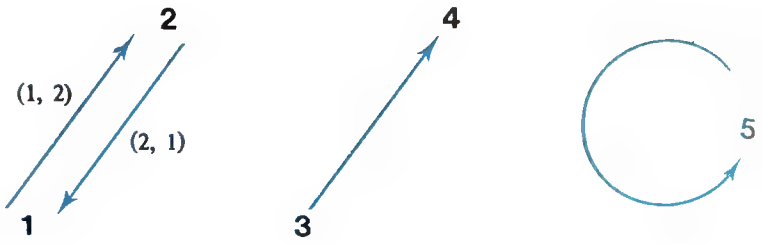
Una vez que el amigo nos ha dicho la cifra, nosotros multiplicamos mentalmente ésta por 9 y el resultado lo multiplicamos por las cifras: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (excluir el 8), el resultado de esta multiplicación da únicamente cifras iguales a la elegida por el amigo.

Supongamos que el amigo ha elegido el 5, pues nosotros multiplicamos 5 x 9 = 45 y hacemos la multiplicación siguiente:

```
   1 2 3 4 5 6 7 9
               x 4 5
 ---------------------
   6 1 7 2 8 3 9 5
 4 9 3 8 2 7 1 6
 ---------------------
 5 5 5 5 5 5 5 5 5
```

Enigmático número 9.

Ej.: Situar en un diagrama de flechas los siguientes pares: (1, 2); (2, 1); (3, 4) y (5, 5).



2.–PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B se llama producto cartesiano de los dos A × B al conjunto cuyos elementos son todos los pares posibles que tengan la primera componente perteneciente al conjunto primero A y la segunda componente perteneciente al segundo conjunto B.

Obsérvese que como los pares (x, y) y (y, x) son distintos, también es distinto el conjunto producto cartesiano A × B del B × A (A×B ≠ B×A).

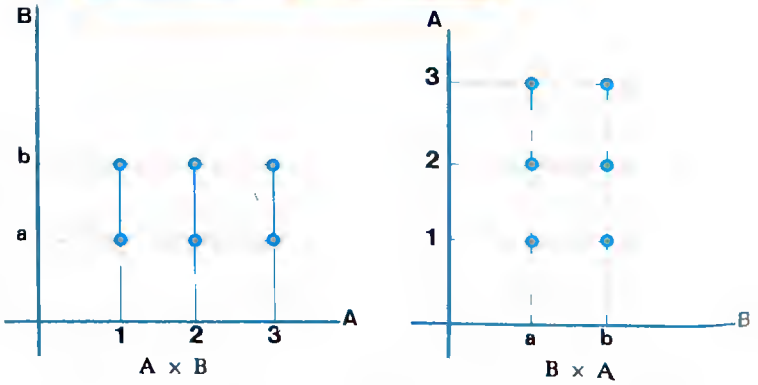
La representación gráfica de un conjunto producto cartesiano se realiza igualmente que como hacíamos para los pares.

Ej.: Dados los conjunto A = (1, 2, 3) y B = (a, b), hallar el producto cartesiano A × B y B × A.

A × B = [(1, a) (1, b) (2, a) (2, b) (3, a) (3, b)]
B × A = [(a, 1) (a, 2) (a, 3) (b, 1) (b, 2) (b, 3)]

Obsérvese cómo representamos gráficamente:

1.º) Mediante un diagrama cartesiano.

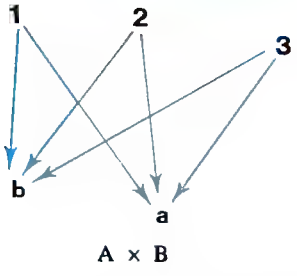


A × B B × A

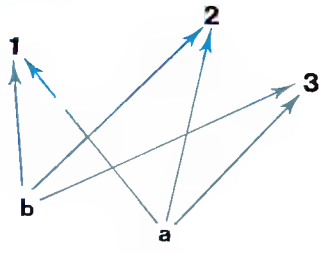
Como ya sabemos de los pares, sus primeras componentes deben de estar siempre en el eje horizontal del diagrama y las segundas en el eje vertical.

Pues bien, si nos dicen que representemos el conjunto A ×B, los pares de él tendrán sus primeras componentes pertenecientes al conjunto A y las segundas al conjunto B, luego el eje horizontal va a ser el dominio del conjunto A y el eje vertical el dominio del eje B.

2.º) Mediante un diagrama de flechas.



A × B



B × A

Ej.: Si el conjunto A está formado por las calles de una ciudad y el conjunto N es el de los números naturales.

El conjunto A × N estará formado por pares cuya primera componente será una calle y la segunda componente un número, luego A × N nos estaría definiendo el conjunto de casas de la ciudad.

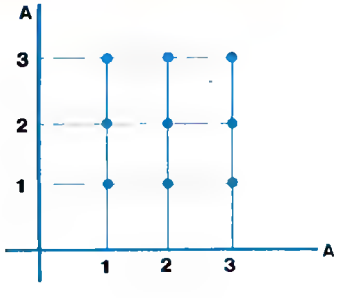
Existe también la posibilidad de efectuar el producto cartesiano de un conjunto A por sí mismo. En estos casos lo representaremos de cualquiera de las formas: $A \times A = A^2$. El procedimiento para obtener el conjunto A × A es el mismo que para obtener un conjunto A × B.

Ej.: Hallar A × A siendo $A = \{1, 2, 3\}$

$A^2 = A \times A = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1)\ (1, 2)\ (1, 3)\ (2, 1)\ (2, 2)\ (2, 3)\ (3, 1)\ (3, 2)\ (3, 3)\}$

Obsérvese cómo lo representamos gráficamente.

1.º Mediante un diagrama cartesiano.



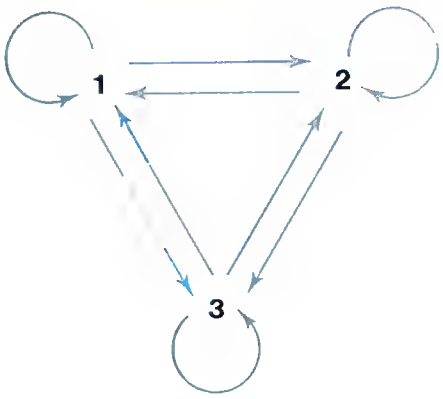
Llegó la orden a un pueblecito de la sierra donde correspondía ir al servicio a dos personas: a un pastor de ovejas muy pobre, y al hijo del alcalde, que tenía fama de ser un avaro, en toda la extensión de la palabra, y por ello no estaba dispuesto a dar un solo céntimo ni a que su hijo fuera a "la mili", sino que siguiera ganando dinero para el millonario padre.

Se las ingenió el padre para hacer que decidiera la suerte. En una bolsa de tela se meterían dos bolas: una blanca y otra negra. El que sacara la negra iría a "la mili". Para que su hijo se salvara, metió en la bolsa dos bolas negras; sacaría primero el pastor y, al sacar una de las negras, ya no había necesidad de que su hijo sacara la otra y así se libraría.

El pastor era pobre, pero no tonto, y se las tenía que ingeniar, o para librarse o para estar en igualdad de condiciones que su contrincante, ya que sabía sobradamente las trampas de que era capaz el avaro alcalde.

Cuando al día siguiente salió el alcalde con el saquito en la mano, estaba reunido todo el pueblo; le ofreció al pastor sacar primero. Este sacó una bola y, sin que la viera nadie, se la tragó diciendo: ¡Me como mi suerte! ¡La que ahí queda es del hijo del alcalde!

2.º Mediante un diagrama de flechas.



Una vez que conocemos la forma de manejar un conjunto producto cartesiano, vamos a estudiar cómo podemos obtener la cantidad de elementos de este sin obtener el conjunto completo.

El número de elementos de un conjunto producto cartesiano; se obtiene multiplicando los números correspondientes a la cantidad de elementos de cada uno de los conjuntos.

Si los conjuntos son A y B:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Si los conjuntos son A y A:

$$n(A \times A) = n(A^2) = n(A) \cdot n(A) = [n(A)]^2$$

Ej.: Si el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y el conjunto $B = \{4, 5, 6, 7\}$

El conjunto $A \times B$ tendrá $3 \cdot 4 = 12$ pares o elementos.
El conjunto $A \times A$ tendrá $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ pares o elementos.

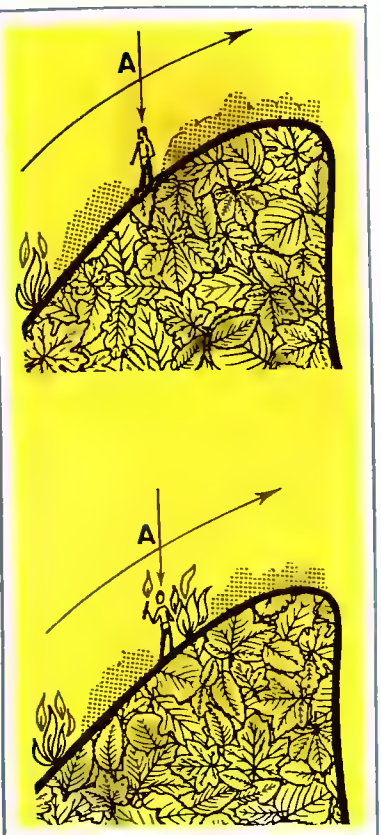
Ej.: Dados los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ y $C = \{4\}$. Hallar el conjunto $A \times (B \cup C)$

$$A \times (B \cup C) = \{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3)\ (1, 4)\ (2, 3)\ (2, 4)\}$$

Ej.: Representar gráficamente el producto cartesiano $A \times B$, siendo:

$$A = \{x \in R,\ 1 \leqslant x \leqslant 3\} \quad y \quad B = \{y \in R,\ 2 \leqslant y \leqslant 3\}$$

De entrada obsérvese que el conjunto A, por ser el primero de $A \times B$, estará situado en el eje horizontal y B por ser el segundo en el eje vertical.

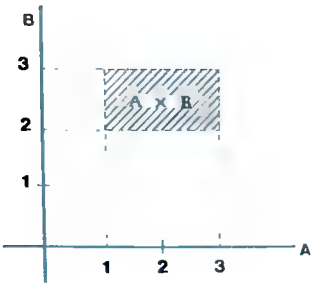


Un excursionista que pasa el día en la montaña se ve sorprendido por un súbito y rápido incendio que le cierra la salida. Se encuentra en el punto A del croquis adjunto, y el viento viene en la dirección que indica la flecha.

Imposible bajar por el otro lado, ya que existe un barranco que no se puede salvar. No lleva herramientas y tiene que salvarse con su ingenio. ¿Cómo proceder?

La solución es ir al primer fuego, encender en él unas ramas; volver otra vez al punto A, e iniciar allí un fuego nuevo, que avanzará a la misma velocidad que el primero. El excursionista caminará de espaldas al primero y detrás del segundo fuego. De esta manera siempre se moverá sobre una zona libre, ya que el primero se apagará solo al llegar al punto A por falta de materia combustible.

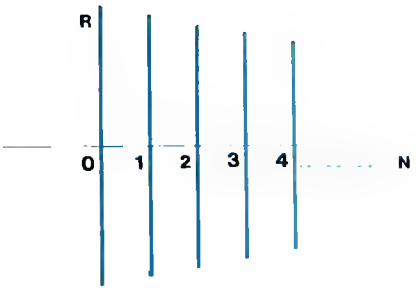
El conjunto A está formado por todos los números reales comprendidos entre 1 y 3 que son infinitos y el conjunto B está formado por todos los números reales comprendidos entre 2 y 3 que son infinitos, luego el conjunto A × B estará formado por infinitos pares.



Obsérvese cómo A × B debe ser la zona rayada.

Ej.: Dibujar un diagrama del tipo N × R.

Como ya sabemos, N es el conjunto de los naturales (enteros y positivos) y R el conjunto de los reales, luego el conjunto N × R estará formado por pares, cuyas primeras componentes serán siempre números enteros de N y las segundas componentes cualquier número de R.



Obsérvese que N × R son las infinitas rectas verticales así dibujadas.

3.—CONCEPTO DE CORRESPONDENCIA

Cualquier correspondencia es una idea que va asociada a dos conjuntos distintos o iguales y a la existencia de una ley o criterio que permita efectuar tal asociación. Pues bien, se llama correspondencia a cualquier criterio o propiedad que permita asociar los elementos de dos conjuntos según pares o parejas.

Vamos pues, a definir los elementos de que consta una correspondencia establecida entre dos conjuntos genéricos A y B.

En Grecia se hablaban tres dialectos: el Dorio, el Eolio y el Jónico. A pesar de formar un solo conjunto territorial, la verdad es que la historia de este pueblo representa una lucha constante entre dos regiones: Atenas y Esparta.

Atenas, pueblo de comerciantes y marinos, aficionados a las ciencias exactas, con inquietudes artísticas, hombres pacíficos, se tuvieron que enfrentar a los espartanos, hombres guerreros, valerosos e indómitos.

Los griegos se mostraban siempre muy orgullosos por el alto nivel a que llegaron en la ciencia y en las artes, de tal manera, que llamaban desdeñosamente "bárbaros" al resto de los pueblos que no se interesaban tanto como ellos por las cuestiones relacionadas con las ciencias y el espíritu.

La India fue el país que primero construyó estatuas gigantes en honor de sus dioses.

En sus templos existían enormes moles de piedra de 20 a 25 metros de altura dedicadas a Brehma.

Enormes elefantes de piedra, tallados en la roca en las montañas de Ellora, sostienen las naves de templos, obeliscos y rotondas que se encastillan unos sobre otros.

No se conoce ni por la tradición ni por ninguna referencia escrita el nombre de los escultores y arquitectos que resolvieron estos enormes problemas de peso y de resistencia. Parece probable que los sacerdotes idearan las obras, tratando de emularse unos a otros, y que bajo su dirección, y en un trabajo de muchos años, consiguieran dar fin a tan enormes construcciones.

Al conjunto de la izquierda A se le denomina, **conjunto inicial**, **conjunto de partida** o **conjunto origen.**

Al conjunto de la derecha B se le denomina, **conjunto final**, **conjunto de llegada** o **conjunto imagen.**

Al criterio f que permite asociar elementos del conjunto de partida con elementos del conjunto de llegada se le llama **correspondencia.**

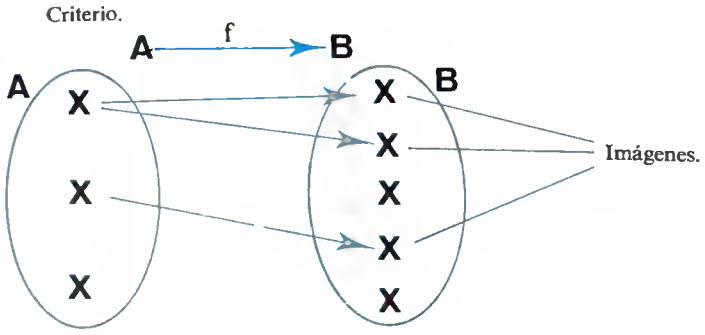
Este criterio se puede expresar de diversas formas.

– Mediante pares.
– Mediante una frase.
– Mediante una expresión matemática.
– Mediante un diagrama de flechas.
– Mediante un diagrama cartesiano.

Su representación suele ser: $A \xrightarrow{f} B$ ó $f : A \longrightarrow B$

A los elementos del conjunto de llegada que están en correspondencia con elementos del conjunto de partida se les denomina **imágenes.**

Obsérvese en el esquema.



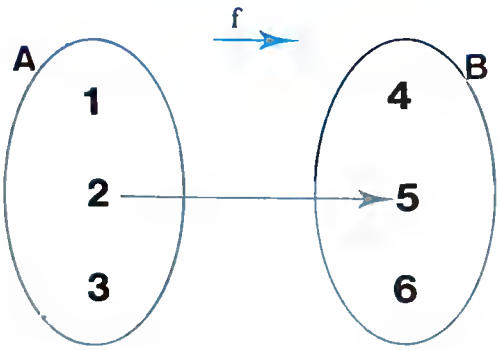
Conjunto inicial	Conjunto final
Conjunto de partida	Conjunto de llegada
Conjunto origen	Conjunto imagen

Como en definitiva, cualquier correspondencia f es un conjunto formado por pares, cuyas primeras componentes pertenecen al conjunto de partida y las segundas componentes al conjunto de llegada, es obvio que su representación gráfica responde a las mismas representaciones gráficas que para los pares, es decir: Mediante un diagrama cartesiano o mediante un diagrama de flechas (este último es el más profusamente utilizado en las correspondencias).

En cualquier correspondencia definida entre dos conjuntos A y B, es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1.3 Entre dos conjuntos A y B se puede definir generalmente más de una correspondencia.

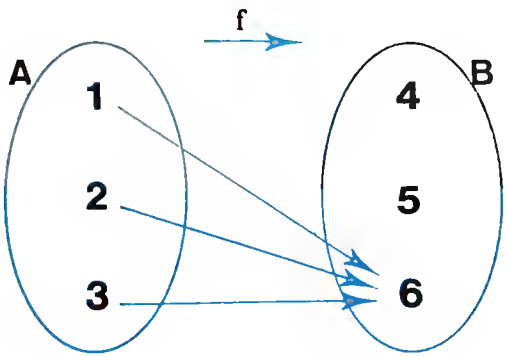
Ej.: Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {4, 5, 6} se establece la siguiente correspondencia f: "A todo número par de A le corresponde cualquier número impar de B"



Obsérvese que podíamos haber citado el criterio contrario al f produciéndose así una correspondencia diferente.

1.4 Cualquier correspondencia definida entre dos conjuntos A y B es siempre un subconjunto de A × B.

Ej.: Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {4, 5, 6} se define la siguiente correspondencia f : A → B = {(1, 6) (2, 6) (3, 6)}



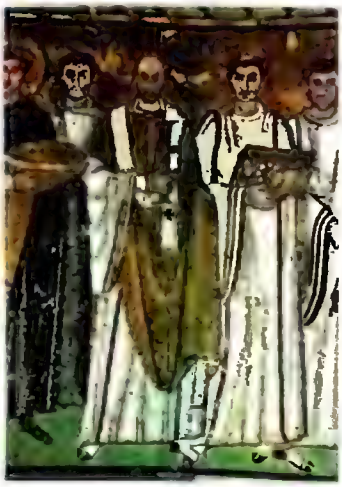
Observemos que f es un subconjunto de A × B. Para ello vamos a obtener A × B y a dibujarlo en un diagrama cartesiano:

A × B = {(1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 4) (2, 5) (2, 6) (3, 4) (3, 5) (3, 6)}

Los chinos llaman a su país el "Celeste Imperio". Los griegos y los romanos le llamaron "Sérica", debido a que de allí procedían las mejores sedas tejidas que se conocían; luego se llamó "Tsin", de donde se deriva su nombre actual.

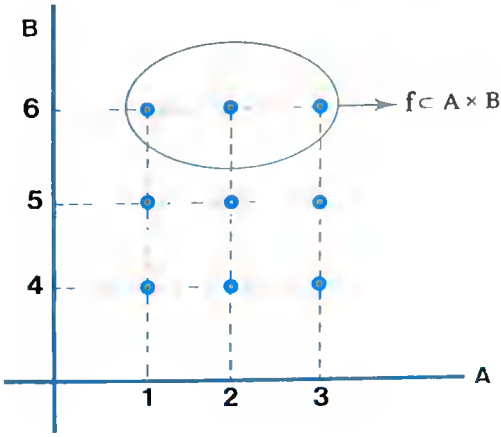
Marco Polo la llamó "Imperio de Catay".

Hasta mediados del siglo XIX, Pekín fue la ciudad más grande del mundo; tenía entonces dos millones de habitantes; la ciudad estaba rodeada de murallas y el plano de la población estaba estudiado con calles rectas, presentando un aspecto perfectamente regular y geométrico.



El imperio bizantino, fundado en el año 395 e iniciado por Arcadio, tuvo una lucha constante y desesperada por la supervivencia de una civilización, que conservando el recuerdo del antiguo imperio romano del que se desgajó, fue también griego y oriental. Se impuso en toda la zona mediterránea durante más de mil años hasta que, el año 1453, los turcos se apoderaron de Constantinopla.

En Bizancio se desarrollaron las artes creando un estilo propio. Lo que actualmente conocemos con más valor matemático son los cálculos que se necesitaron para la construcción de las iglesias de Santa Sofía, San Sergio y San Baco; las tres en Constantinopla. Los problemas de construcción y de arquitectura, hábilmente resueltos, exigen unos conocimientos nada fáciles.



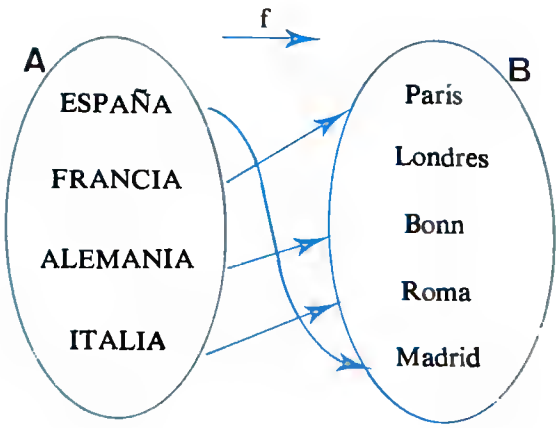
Así para poder realizar cualquier problema de correspondencia es necesario que poseamos los datos siguientes:

— El conjunto de partida y el de llegada.

— El criterio que permita asociar los elementos de ambos, según pares.

Ej.: sea A = {España, Francia, Alemania, Italia} y B = {París, Londres, Bonn, Roma, Madrid} y la correspondencia f : A → B "a cada país le corresponde su capital".

Definir el conjunto imagen.

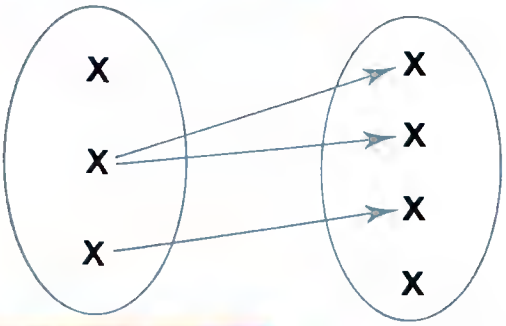


Im (f) = {Paris, Bonn, Roma, Madrid}

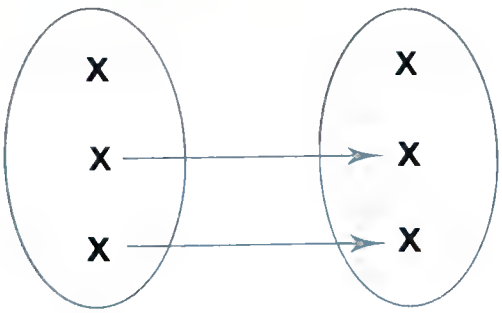
Téngase en cuenta que un conjunto imagen de otro está formado por los elementos del conjunto de llegada que tienen correspondencia con algún elemento del conjunto de partida.

4.–TIPOS DE CORRESPONDENCIAS

A) Correspondencia Pluriunívoca. Ocurre cuando al menos existe algún elemento del conjunto de partida que tiene dos o más imágenes en el conjunto de llegada.



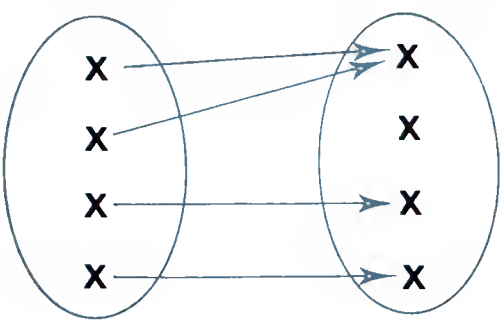
B) Correspondencia Univoca. Ocurre cuando los elementos del conjunto de partida poseen como máximo una o ninguna imagen en el conjunto de llegada.



5.–APLICACIONES

Se entiende por aplicación a cualquier correspondencia unívoca entre dos conjuntos, de tal modo que todos los elementos del conjunto de partida deben tener una y sólo una imagen en el conjunto de llegada.

En resumen, para decidir si una correspondencia es aplicación debemos mirar siempre al conjunto de partida y ver si de todos los elementos de éste parte una y sólo una flecha, en el gráfico que haremos.



El Islam es una religión con más de 500 millones de fieles, no obstante es una religión sin sacerdotes. Tiene unos encargados de dirigir las plegarias: los imanes; pero cada fiel es directamente responsable de sus actos ante Alá.

La espectacular expansión de esta doctrina en sus primeros tiempos se debió al ímpetu guerrero de sus primeros creyentes.

Más tarde, y ya con territorios estabilizados y dominados, su aportación a las artes y a las ciencias es muy importante; construyen fabulosos edificios y sus matemáticos elaboraron un sistema muy práctico de numeración e inventan al guarismo cero.

El Corán y la Sunna son los textos sagrados que, desde su fundación hesta hoy inclusive, rigen todos los actos de la comunidad musulmana.

Para representar las cantidades los romanos atribuyeron valores convencionales a una serie de letras de su alfabeto, estas letras numerales fueron: I, V, X, L, C, D y M, a las cuales otorgan como valores respectivamente 1, 5, 10, 50, 100, 500 y 1.000 unidades.

Las diversas combinaciones que pueden lograrse con ellas permitían expresar todas las cantidades.

En la actualidad se usa este sistema de numeración romana en las inscripciones de lápidas y en otras leyendas de carácter ornamental.

6.–TIPOS DE APLICACIONES

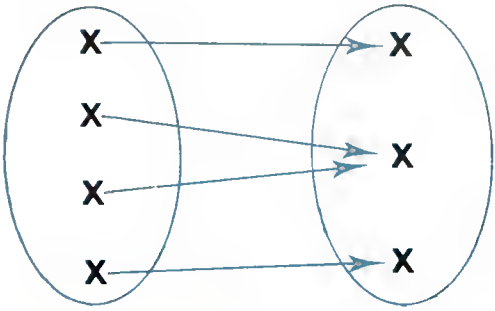
Una vez que hemos decidido que una correspondencia es una aplicación (mirando al conjunto de partida), pasaremos a clasificar la aplicación.

El tipo de aplicación que sea, se detecta observando al conjunto de llegada. Vamos pues a ver los tipos de aplicaciones que existen:

A) Aplicación Suprayectiva, Sobreyectiva o Exhaustiva.

Una aplicación es suprayectiva cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de al menos un elemento del conjunto de partida y alguno de ellos imagen de dos elementos por lo menos del conjunto de partida.

En resumen, cuando a todos los elementos del conjunto de llegada les llega por lo menos una flecha y a alguno de ellos más de una flecha.

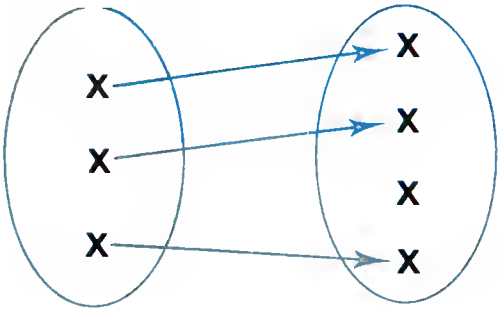


Evidentemente es una aplicación suprayectiva el conjunto de partida posee más elementos que el conjunto de llegada.

B) Aplicación Inyectiva.

Una aplicación es inyectiva cuando los elementos del conjunto de llegada son como máximo imagen de un elemento del conjunto de partida y alguno de ellos no es imagen de ningún elemento del conjunto de partida.

En resumen, cuando a los elementos del conjunto de llegada les llega como máximo una flecha y a alguno de ellos ninguna.



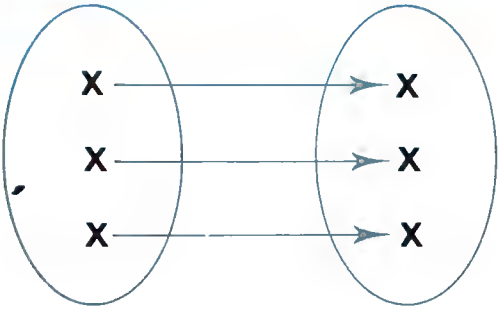
Evidentemente en una aplicación inyectiva el conjunto de partida posee menos elementos que el conjunto de llegada.

C) Aplicación Biyectiva o Biunívoca.

Una aplicación es biyectiva cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen, de uno y sólo de uno, de los elementos del conjunto de partida.

En resumen cuando a los elementos del conjunto de llegada les llega, a todos y a cada uno, una y sólo una flecha.

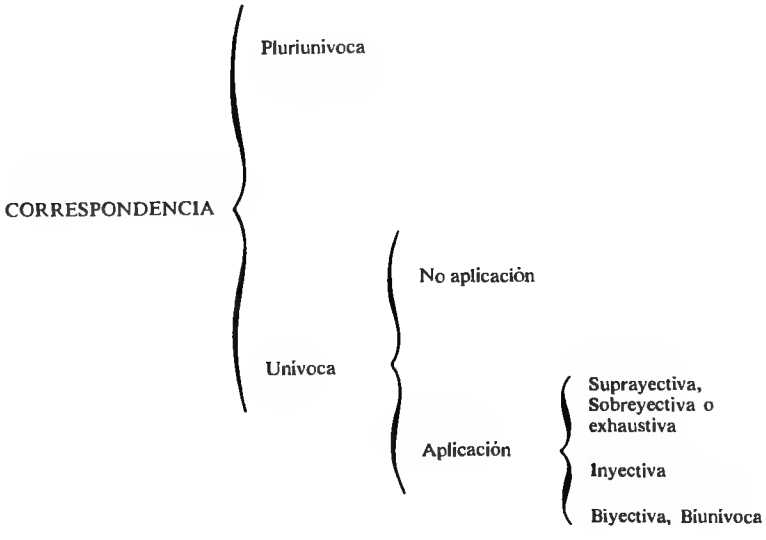
Cualquier aplicación biyectiva es suprayectiva e inyectiva simultáneamente.

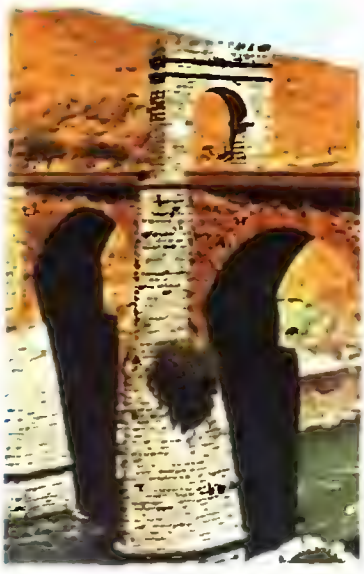


Evidentemente, en una aplicación biyectiva, el conjunto de partida posee igual número de elementos que el conjunto de llegada.

7.–RESUMEN DE CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES

Vamos a hacer un esquema para retener todos los importantes conceptos anteriores, partiendo del más general de correspondencia.





La dominación romana en España duró más de seiscientos años. Después de tan largo tiempo los naturales del país se integraron totalmente en la forma de vida y en la culture de los conquistadores, e incluso influyeron decisivamente en ella.

Los romanos acabaron con la civilización cartaginesa, y los pueblos bárbaros y del Norte de Europa suplantaron a la cultura mediterránea de los anteriores.

Entre las grandes obras públicas, dejadas por los romanos, se puede citar la llamada Vía Augusta, que unía gran parte de su imperio. Partía de Roma, atravesaba parte de Italia, el Sur de Francia, entraba por los Pirineos a Gerona, Barcelona, Tarragona, Zaragoza, León y terminaba en Galicia. Otra vía importante unía Córdoba, Sevilla, Jerez y Cádiz.

La península Ibérica la llamaron Hispania, dividiéndola en dos provincias: Citerior con capital en Tarragona y Ulterior con capital en Cádiz.

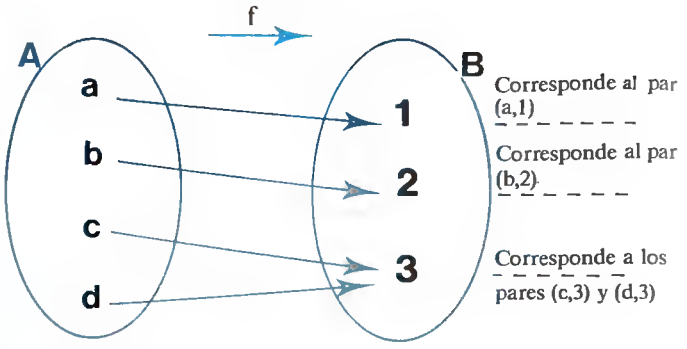
Al mando de cada una de ellas estaba un pretor.

Los chinos y los japoneses desarrollaron independientemente su sistema propio de numeración. Las unidades las representaban con varillas de bambú; atravesadas por una cuerda, sirvieron para practicar la suma; llevadas a un tablero, formaron una especie de ábaco muy utilizado en toda Asia hasta tiempos muy recientes.

Todavía se suelen organizar en naciones asiáticas concursos y campeonatos en los que se enfrentan personas expertas en el uso de calculadoras electrónicas y habilísimos contables, generalmente personas ya mayores que usaron toda su vida el ábaco. Según se puede leer en los periódicos que informan de estas noticias, es frecuente la victoria de los expertos en el ábaco.

Ej.: Entre los conjuntos A = {a, b, c, d} y B = {1, 2, 3} definimos la siguiente correspondencia f: A → B = {(a, 1) (b, 2) (c, 3) (d,3)}. Clasificar f.

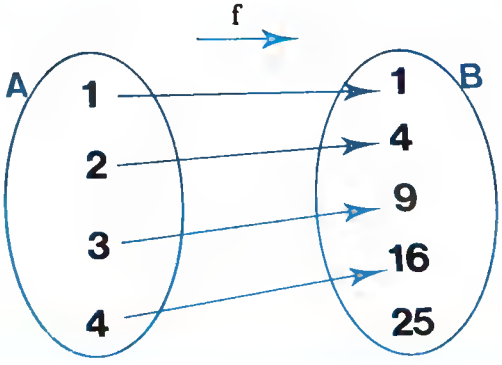
Inicialmente vamos a plantear el diagrama de flechas.



Observando el diagrama vemos que es una aplicación por nacer de cada elemento del conjunto de partida una y sólo una flecha de cada uno y de todos sus elementos. Para ver qué tipo de aplicación es, estudiaremos el conjunto de llegada, que por tener todos sus elementos una flecha y alguno de ellos más de una, decidiremos que se trata de aplicación suprayectiva

Ej.: Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {1, 4, 9, 16, 25}, donde definimos la siguiente correspondencia f: A → B = "A cada elemento de A le corresponde su cuadrado en B" Clasificar f.

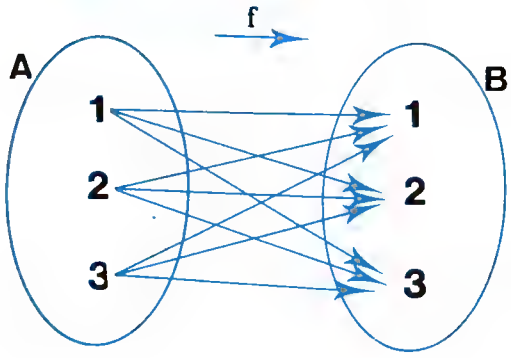
Dibujemos el diagrama de flechas



Se trata de una aplicación inyectiva. Aplicación, porque de cada elemento del conjunto de partida parte una flecha. Inyectiva, porque a los elementos del conjunto de llegada les llega una sola flecha y a algunos ninguna flecha

Ej.: Sea el conjunto A = {1, 2, 3} donde estableceremos la siguiente correspondencia f: A → A = "A cada elemento de A le corresponden los elementos de A" Clasificar f.

Dibujemos el diagrama sagital.



Se trata de una correspondencia simplemente, porque de cada elemento del conjunto de partida nace más de una flecha.

8.–CONCEPTO DE FUNCION

En general a cualquier correspondencia se la puede llamar también función. Lo que ocurre es que una función intenta representar una correspondencia entre dos conjuntos cuando el criterio f que define tal correspondencia viene expresado mediante una ley matemática. (Obsérvese que en lo anteriormente expuesto y en todos los ejemplos hemos manifestado el criterio f mediante pares o mediante una frase.)

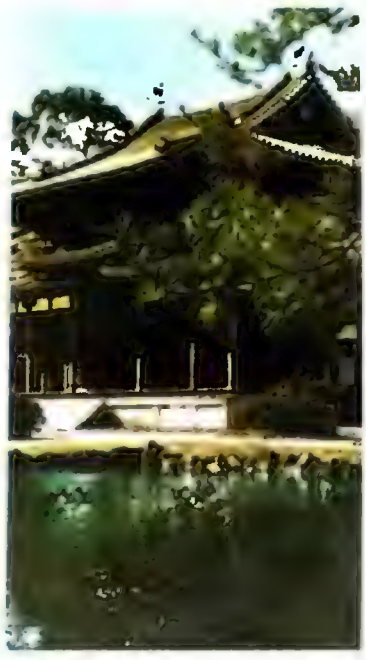
Pues bien, toda función suele estar expresada por una ley matemática que consta de una variable y de una función. La variable es la que acepta los valores, que transformados mediante la ley matemática que se exponga da como resultado el valor correspondiente de la función.

Una función se puede representar de diversas formas. Las más usuales son: $y = 2x$; $f(x) = 3x$; $x \to 5x + 1$.

Ej.: Obsérvese cómo en la función $y = 3x$, a medida que le damos valores a la variable x obtenemos los correspondientes valores de la función y.

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
−2	−6

Véase que de lo que se trata es de dar valores a x y ver cuál es el resultado de 3x para el valor dado de x, con lo que obtenemos el correspondiente de y que es igual a 3x ($y = 3x$).



Pekín en su época de esplendor estaba compuesta por tres ciudades distintas, cada una con su muralla propia, además de una gran muralla que cerraba todo el conjunto.

Estas ciudades eran: la china, la tártara y la imperial.

La ciudad china tenía forma de un cuadrilátero regular, en ella vivía la gente más humilde.

La ciudad tártara formaba un cuadrilátero mucho mayor y era la zona de los nobles, de los potentados, de los comerciantes y artistas.

Una gran calle de cincuenta metros de ancho y de diez kilómetros de longitud la atravesaba en toda su extensión y al final de ella se alzaba la facheda del palacio Imperial, formando e su vez otro rectángulo mucho mayor donde vivía el emperador y su corte.

Calendario Azteca o Piedre del Sol, se considera una glorificeción del estro rey; tiene 3,66 metros de diámetro y procede del templo Mayor.

Representa en el centro la cara del Sol, sacando la lengua; gesto que parecía ser de buena suerte. A ambos lados de la care, las manos son garras para eprisionar corazones; las cuatro aspas o rectángulos son jeroglíficos de los días en que acababan las épocas de los soles anteriores: viento, tigre, diluvio y ague.

El círculo siguiente tiene jeroglíficos que representan los días del mes: Cocodrilo, viento, casa, lagarto, serpiente, calevera, venado, conejo, agua, perro, mono, hierba, caña, jaguar, águila, buitre, movimiento, pedernal, lluvia y flor. Las dos franjas que terminan en cabezas de animales son dos serpientes que representan a los dioses del Norte y del Sur. El exterior representa el cielo con sus estrellas.

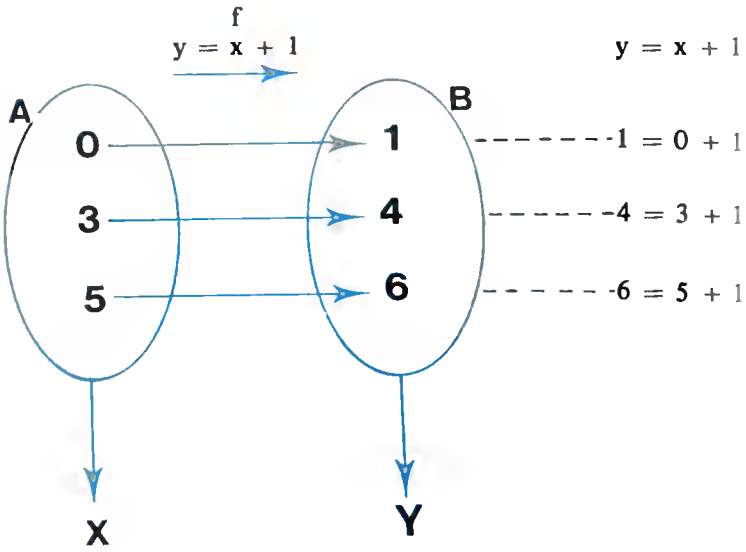
Ej.: Imaginemos que una correspondencia, el conjunto de partida es A = {1, 2, 3} y sin saber cuál es el conjunto de llegada, veamos en qué se transforman los valores de A mediante el criterio y = x + 5 (x pertenece al conjunto de partida, e y al conjunto de llegada).

para x = 1 ⟶ y = 1 + 5 = 6
para x = 2 ⟶ y = 2 + 5 = 7
para x = 3 ⟶ y = 3 + 5 = 8

Ej.: Se dan los conjuntos A = {0, 3, 5} y B = {1, 4, 6} y la correspondencia f: A → B "y = x + 1; ∀x∈A, ∀y∈B"

Clasificar f

Dibujemos el diagrama de flechas.



Luego se trata de una aplicación biyectiva.

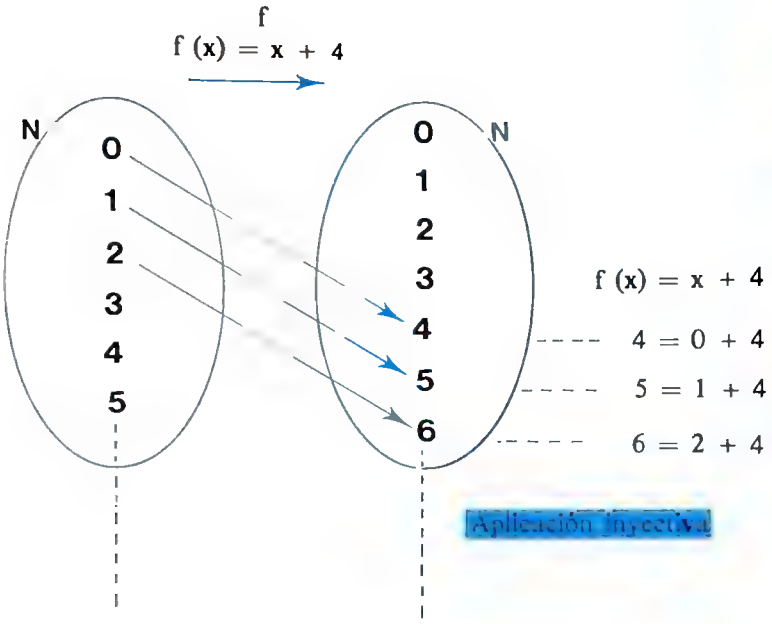
Ej.: Considérense las siguientes correspondencias:

f : N → N ; ∀x∈N ; f (x) = x + 4
g : Z → Z ; ∀y∈Z ; g (y) = y^3
h : Z → Z ; ∀y∈Z ; h (y) = −y

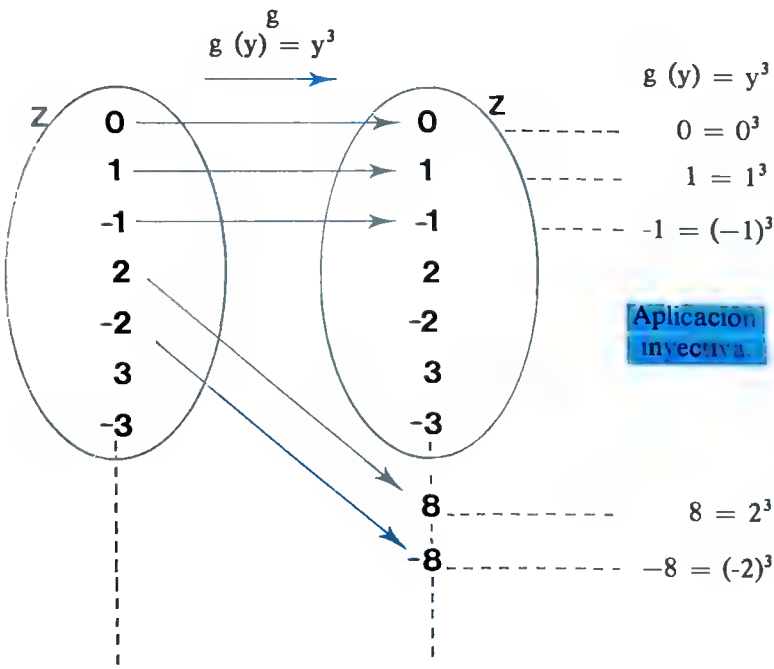
Clasificar f, g y h.

Para hacer este ejercicio, inicialmente debemos de saber qué es N y Z. N es el conjunto de los números naturales y Z el conjunto de los números enteros. Así que cuando dibujemos N y Z en los

diagramas de flechas pondremos únicamente una muestra representativa de ellos, ya que poseen infinitos elementos y es obvio que no podríamos expresar todos.



A la vista del esquema gráfico, se observa que cualquier elemento de N (conjunto de partida) va a tener imagen en N (conjunto de llegada) y el 0, 1, 2 y 3 van a quedar sin ser imagen de ningún elemento.



En las orillas del lago Titicaca existen monumentos megalíticos cuya antigüedad no se ha podido determinar. Es muy probable que correspondan a una civilización contemporánea a las más antiguas de Asia.

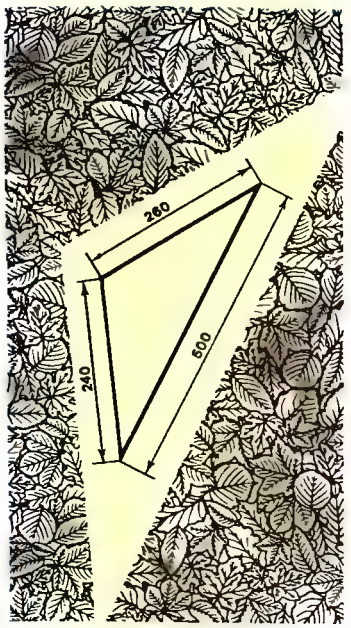
En Tihaguanaco existen también ruinas antiquísimas.

En Estados Unidos, en el Sur de Nevada, se han descubierto las ruinas de una ciudad prehistórica cuya antigüedad parece remontarse a unos 3.000 años antes de J. C.

En Nuevo México se descubrieron las ruinas del Pueblo Bonito. Este pueblo estaba formado por un inmenso y único edificio capaz de albergar a 1.200 ó 1.500 habitantes. En él existen unas cámaras circulares que estaban destinadas a las ceremonias religiosas.

Estas ciudades pertenecieron a la civilización precolombina y tuvieron que usar sistemas matemáticos propios.

Cuando los españoles llegaron a América, las civilizaciones que construyeron los enormes Teocalis, habían desaparecido ya desde hacía varios siglos.



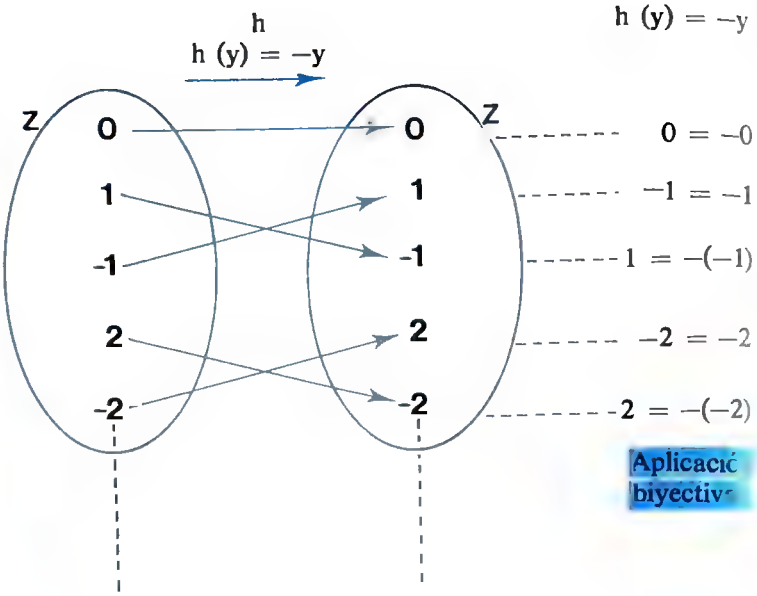
EL SOLAR DE LA DISCORDIA

La inmobiliaria X, perteneciente a una banda mafiosa conocida por sus pocos escrúpulos, publicó en varios periódicos un anuncio poniendo en venta un solar de forma triangular con las medidas que se indican en el croquis. Este terreno, situado en el centro de la ciudad, se ofrecía a un precio realmente interesante. Una banda rival, la Y, compró este terreno.

A los pocos días, y comprobando tranquilamente el terreno adquirido, se dieron cuenta de que habían sido engañados. Salieron a relucir las metralletas y los muchachos de la banda Y liquidaron a los de la banda X. ¿Por qué se enfadaron tanto?

Si sumamos los dos lados del triángulo veremos que 260 m. + 240 m. = 500 m.; como 500 m. es la longitud del lado mayor, tenemos que no existe tal triángulo, sino que vendieron un terreno inexistente, ya que en realidad es solamente **una línea recta.**

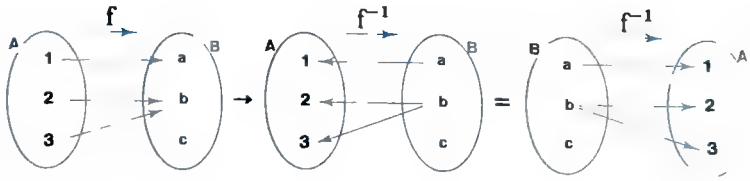
La banda Y tenía razones más que suficientes para sentirse estafada.



9.–CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES INVERSAS

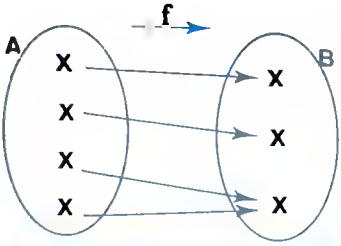
Dada una correspondencia f definida entre dos conjuntos A y B (f : A → B), se llama correspondencia inversa a la f^{-1} entre B y A (f^{-1} : B → A), que como se observa es la que resulta de invertir los conjuntos de partida y de llegada (es decir, en el diagrama de flechas, cambiando su sentido).

Ej.: Entre los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b, c} se define la correspondencia f : A → B = {(1, a) (2, b) (3, b)}. Hallar su inversa f^{-1}.

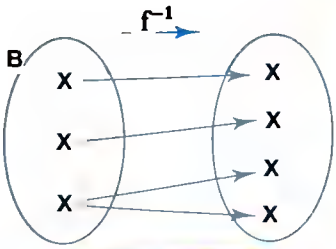


Obsérvese que de lo que se trata es de poner como conjunto de partida al conjunto de llegada y como conjunto de llegada al conjunto de partida e invertir los pares de la correspondencia. El par (1, a) se transforma en (a, 1), el (2, b) en (b, 2) y el (3, b) en (b, 3).

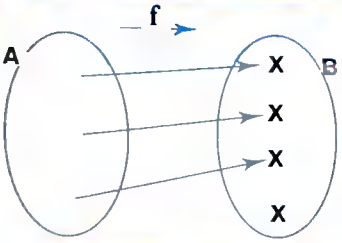
Visto el criterio y el mecanismo de obtención de una correspondencia inversa, es también conveniente tener en cuenta que cuando una correspondencia sea aplicación, la inversa no tiene por que ser aplicación y viceversa. (Veámoslo con los gráficos adjuntos.)



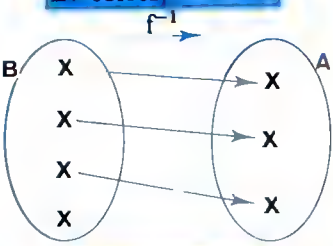
Aplicación suprayectiva



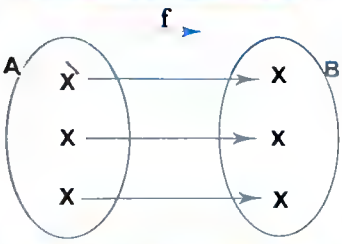
No es aplicación
Es correspondencia



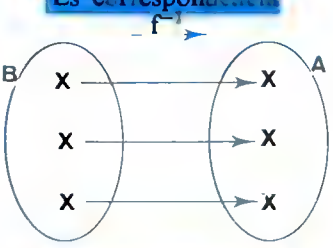
Aplicación inyectiva



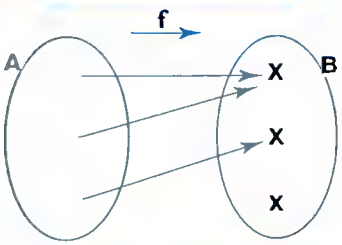
No es aplicación
Es correspondencia



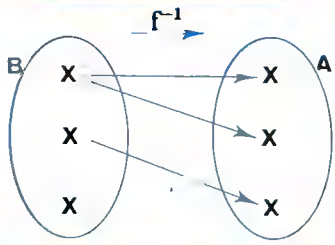
Aplicación biyectiva



Aplicación biyectiva



Simplemente aplicación

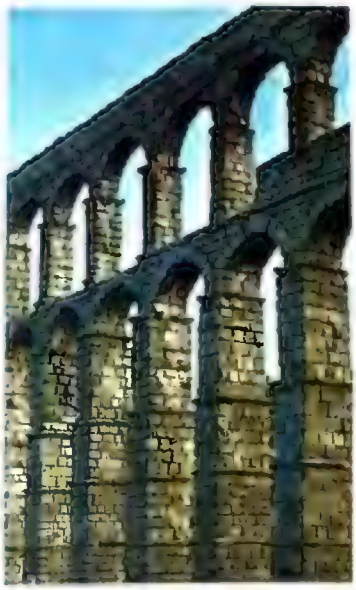


No es aplicación
Es correspondencia

De lo que se deduce que una correspondencia f y su inversa f^{-1} son siempre las dos aplicaciones, cuando cualquiera de ellas es biyectiva.

Cuando una correspondencia viene expresada por el criterio de una función, la operación de hallar su inversa es igual.

Sin embargo se plantea un pequeño problema a la hora de localizar el criterio (función) de la inversa.



La civilización romana, siendo maravillosa en ingeniería civil, con obras públicas (acueductos, calzadas, puentes, anfiteatros, etcétera) que iban a desafiar miles de años, no se distinguió, sin embargo, por la existencie de grandes matemáticos, ni por la profundización de esta materia a la que no dieron gran importancia. Ellos, con los conocimientos heredados de civilizaciones anteriores, tenían cubiertas todas sus necesidades prácticas: podían contar, pesar y medir, construir y urbanizar. Desarrollaron en los grandes locales une normativa sobre acústica, pero siempre utilizando matemáticas sencillas y basando sus cálculos en un derroche de materiales de construcción, ya que edificaban con muros, pilares, soportes, etc., en los que aumentaban deliberadamente su grosor para tener seguridad de su resistencia final.

Los alquimistas árabes realizaron infinitos cálculos para hallar un procedimiento mediante el cuel, cambiando la composición de los diferentes materiales, y de mutación en mutación, podían, buscando su quinta esencia, convertir todo en oro. Esta ciencia, muy extendida en la Edad Media, unas veces alabada y otras temida y perseguida, no consiguió lo que se proponía, pero a ellos se debe la obtención del alcohol y del fósforo.

Los estudios posteriores y los grandes adelantos de la ciencia han conseguido que los sueños de la alquimia no parezcan tan descabellados. Hoy día el radio puede convertirse en plomo y, según un químico alemán, ha sido posible convertir el plomo en oro.

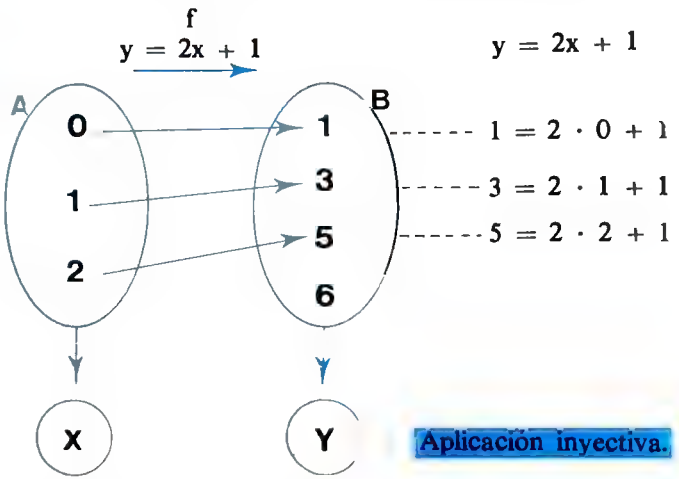
De todas formas, el hombre hoy día busca más la rentabilidad y el pragmatismo en sus descubrimientos porque, fabricar oro, si sele muchísimo más caro que el existente no resuelve nada.

Para hallar la función de una correspondencia inversa, lo que se debe de hacer es despejar de la función primitiva la incógnita o letra que pertenece al conjunto de partida (la x) con el objeto de ponerla en función de la incógnita o letra que pertenece al conjunto de llegada.

Es decir, inicialmente la función está de la forma $y = f(x)$; pues hay que expresarla de la forma $x = f(y)$.

Ej.: Se dan los conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{1, 3, 5, 6\}$ y la correspondencia $f : A \to B$; $y = 2x + 1$; $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$. Clasificar f. Hallar su inversa f^{-1} y su criterio. Clasificar f^{-1}.

Inicialmente expondremos el diagrama de flechas.

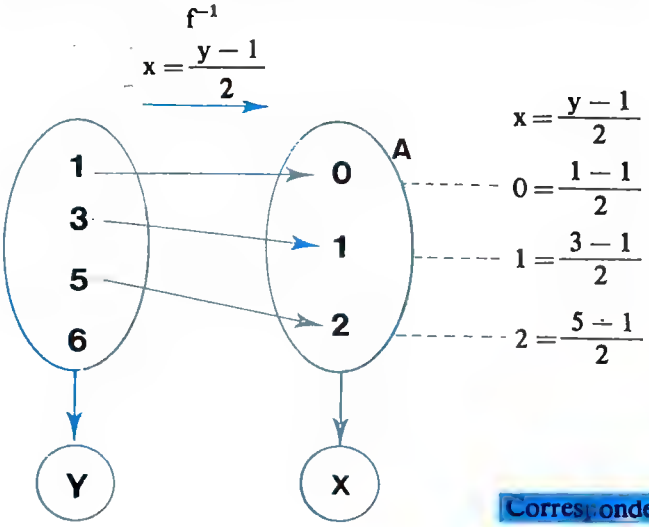


Aplicación inyectiva.

Vamos pues, a pasar al cálculo de su inversa f^{-1} y a obtener su criterio. Si f es $y = 2x + 1$, para hallar f^{-1} tendremos que despejar la x:

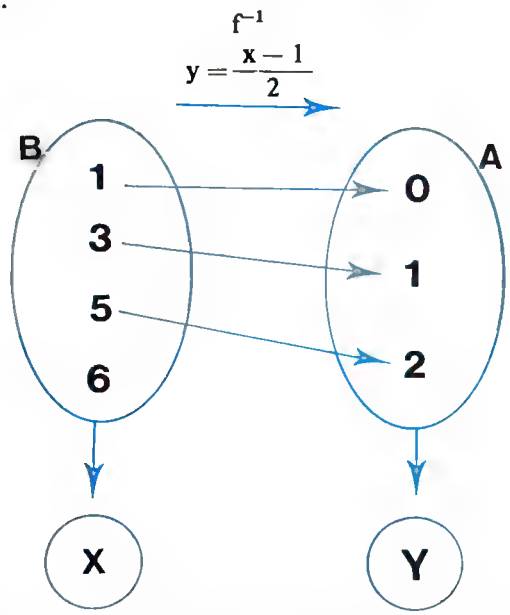
$$y = 2x + 1;\ y - 1 = 2x;\ \frac{y-1}{2} = x : x = \frac{y-1}{2}$$

Con lo que ya podremos exponer el gráfico de f^{-1} completo.



Correspondencia

A veces es norma, y se hace con mucha frecuencia, el que una vez que hemos despejado x de $y = 2x + 1$ y hemos obtenido $x = \frac{y-1}{2}$ se suele cambiar en la expresión resultante la x por y, y la y por x, obteniendo en este caso $y = \frac{x-1}{2}$, de tal forma que ahora las x pertenecen al conjunto de partida y las y al conjunto de llegada.

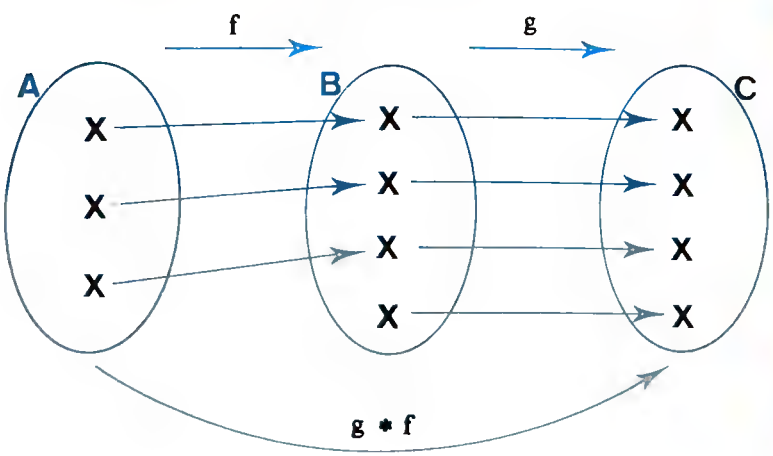


10.–PRODUCTO DE APLICACIONES. APLICACION COMPUESTA

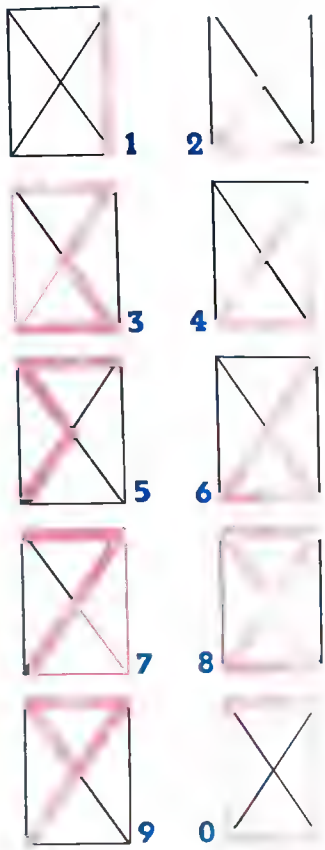
Para formalizar una aplicación compuesta debemos de contar con tres conjuntos en general.

Es decir, que definidos tres conjuntos A, B y C y las aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se llama aplicación compuesta o producto de las aplicaciones f y g a la aplicación que permite transformar elementos del primer conjunto A al tercer conjunto C, sin utilizar el segundo B.

Se representa por $g * f$; $g \circ f$; $g \cdot f$.



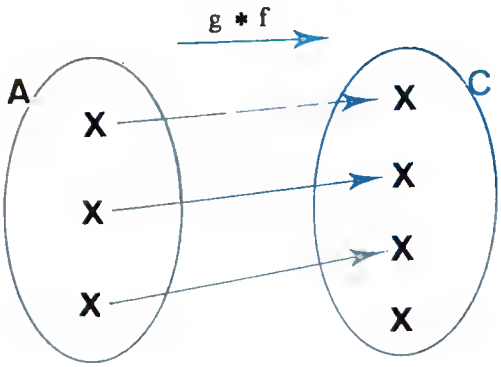
Los árabes fueron maestros en el arte de cultivar le tierra, consiguiendo de ella un rendimiento óptimo en vegetales útiles al hombre. Ellos trejeron a España numeroses especies que consiguieron aclimatar a nuestras comarcas. Entre ellas podemos citar: el melón, el arroz, el naranjo, el azafrán, el espárrago y la palmera datilera. Sus estudios sobre las posibilidades de encontrar agua, y sus sistemas de cálculos y trazados de canales y acequias, crearon en todo el levante y en Andalucía una agricultura muy próspera; y todavía se conserven en uso algunas traídas de agua de su época.



Los números tienen una raíz simbólica y están basados en figuras geométricas.

Sobre un rectángulo en el que se trazan dos diagonales se inscribieron todos ellos; según tablillas antiguas el rectángulo anterior representa el sello de Salomón.

En esencia su forma se conserva actualmente; el único que mayormente ha evolucionado a través del tiempo ha sido el número cuatro.



La simbolización para hallar el criterio de la compuesta es: $g*f = g(y) * f(x) = g[f(x)]$ que en definitiva de lo que se trata es de sustituir la función f en la función g.

Ej.: Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{4, 5, 6, 7\}$ y las aplicaciones:

$f : A \to B$; $y = x + 1$; $\forall x \in A$; $\forall y \in B$;

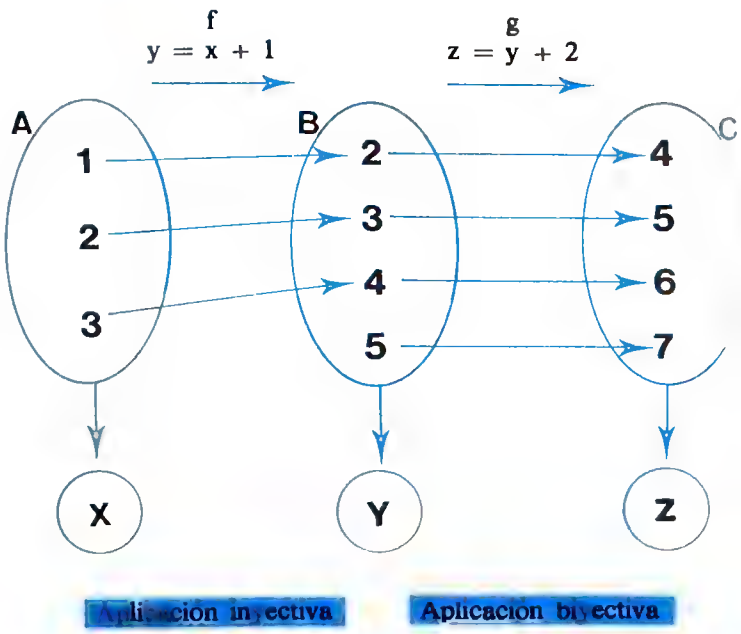
$g : B \to C$; $z = y + 2$; $\forall y \in B$; $\forall z \in C$.

Se pide:

a) Clasificar f y g.

b) Hallar la aplicación producto g*f y clasificarla.

c) Hallar $(g*f)^{-1}$ y clasificarla.



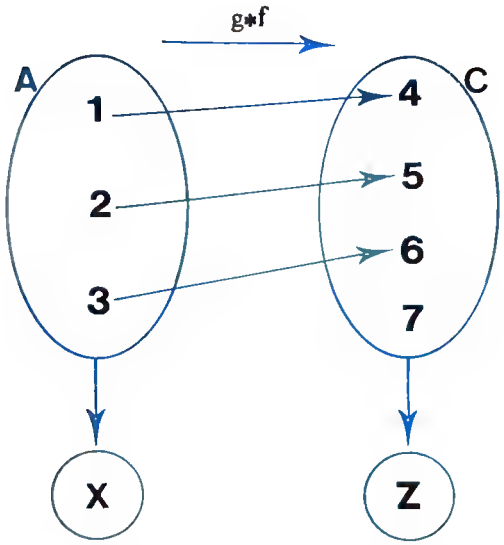
b) Para hallar la aplicación compuesta podemos seguir dos caminos:

1. Observando la transhumancia de flechas en el gráfico.

de 1 a 2 y de 2 a 4, luego de 1 a 4
(1, 2) y (2, 4) ⟶ (1, 4)

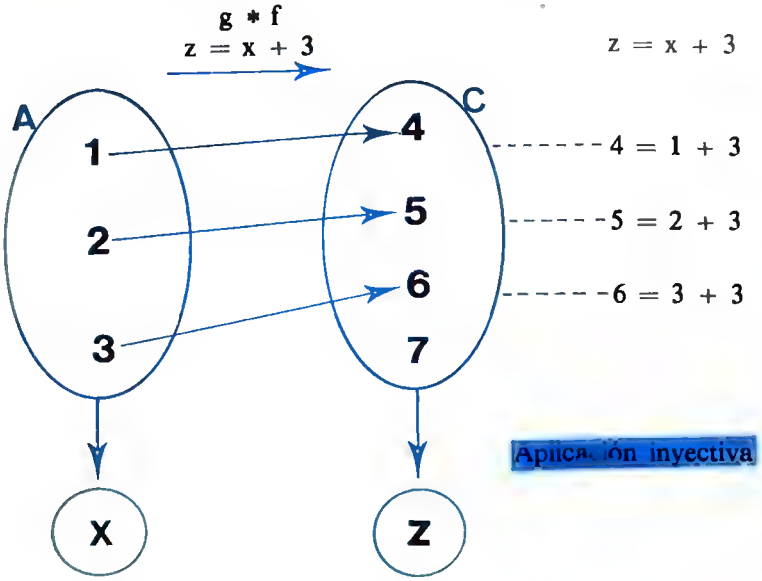
de 2 a 3 y de 3 a 5, luego de 2 a 5
(2, 3) y (3, 5) ⟶ (2, 5)

de 3 a 4 y de 4 a 6, luego de 3 a 6
(3, 4) y (4, 6) ⟶ (3, 6)



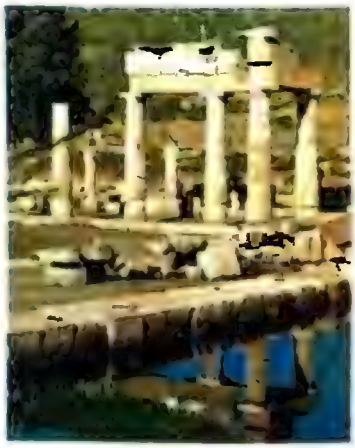
2. Hallando la función correspondiente a g*f. Para ello, habrá que sustituir la función f en la función g.

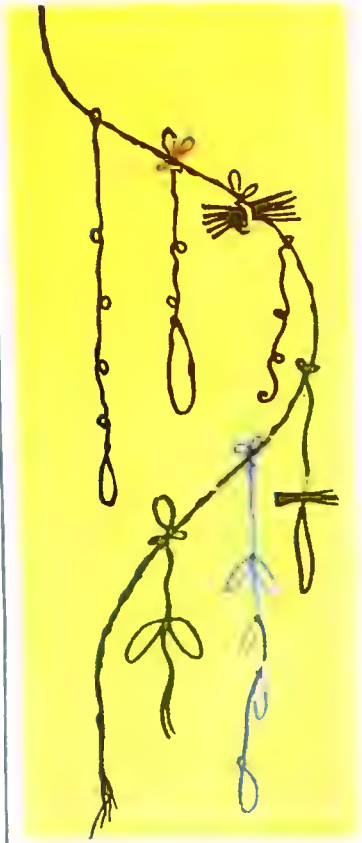
$$\left.\begin{array}{l} f : y = x + 1 \\ g : z = y + 2 \end{array}\right\} \longrightarrow z = (x + 1) + 2 \longrightarrow z = x + 3$$



Aplicación inyectiva

Entre las obras de mayores proporciones construidas por los griegos culmina la estatua de Júpiter, debida al escultor Fidias, construida en piedra con incrustaciones de oro y marfil. Fue famosísimo el llamado Coloso de Rodas, levantado en el puerto de la isla de Rodas, y que fue considerado una de las maravillas de la antigüedad y erigido en honor de Apolo. Esta colosal estatua, construida por Cares, tenía una altura enorme; por entre sus piernas pasaban con las velas desplegadas los más grandes barcos de la época. Este monumento se construyó unos 300 años antes de Cristo, estando en pie solamente 56 años, siendo destruida por un fortísimo terremoto que conmovió toda la zona.





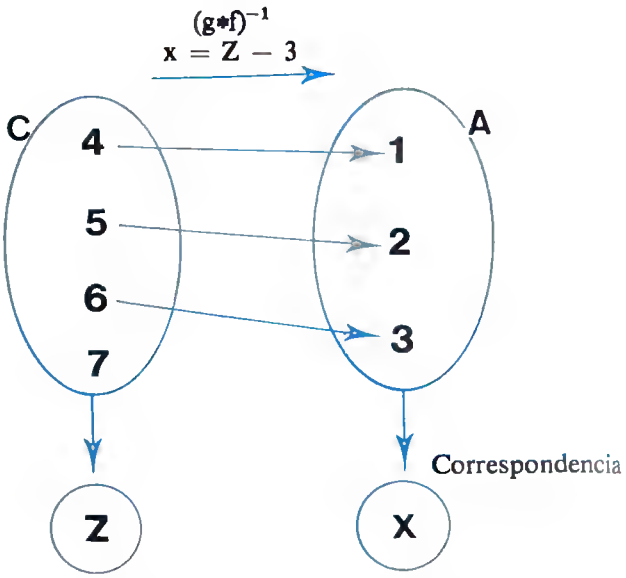
En el antiguo Perú los indios quichuas pertenecientes al imperio Lucaico utilizaron un sistema de cuerdas anudadas y coloreadas de diferentes longitudes que servían para recordar diferentes cantidades. Los llamaban Quipu y eran guardados por quipumayos (especie de sacerdotes que siempre las llevaban consigo).

En otros tiempos se creyó ver en estos quipus un lenguaje; se pensaba que los nudos, los colores y los trozos de ramas expresaban palabras o ideas.

Investigaciones modernas han probado que solamente servían para contabilizar cifras o marcas, fechas importantes en la historia de su pueblo. El quipumayo que lo guardaba era algo así como el cronista oficial de su pueblo y realmente solo él sabía descifrar sus cuentes.

c) Vamos a hallar el criterio de su inversa $(g*f)^{-1}$.

$$Z = x + 3 \; ; \; Z - 3 = x \; ; \; x = Z - 3$$



Téngase en cuenta que también podríamos haber cambiado la x por Z, y la Z por x en la inversa, obteniendo $Z = x - 3$, como ya se ha dicho.

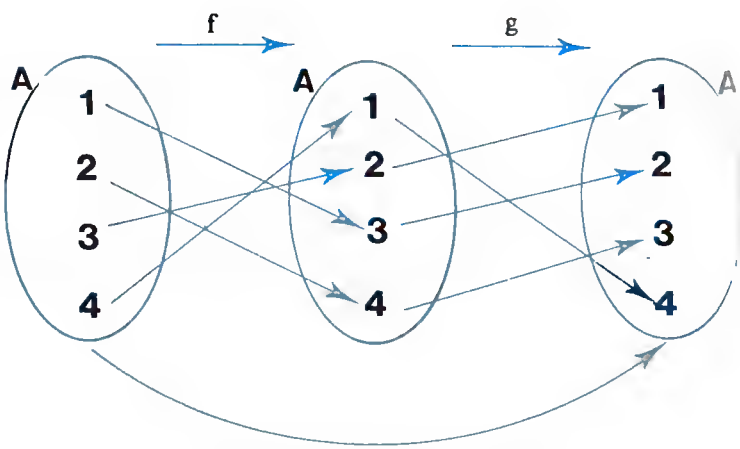
Ej.: Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las aplicaciones:

$f : A \to A = \{(1, 3) (2, 4) (3, 2) (4, 1)\}$

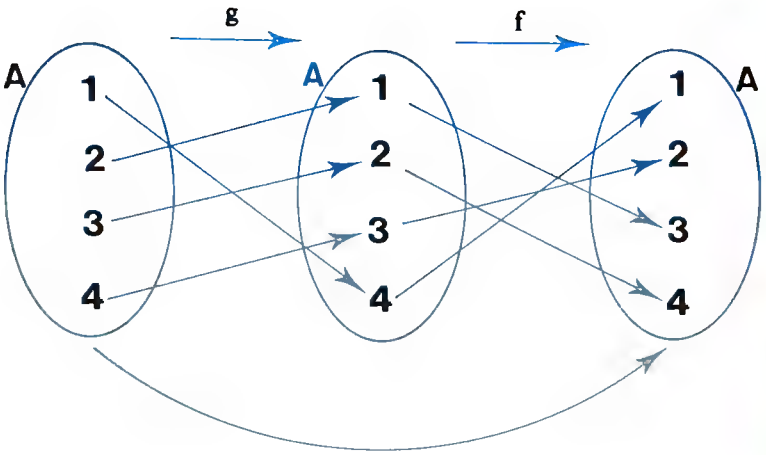
$g : A \to A = \{(1, 4) (2, 1) (3, 2) (4, 3)\}$

Hallar la aplicación g*f y f*g.

Haciendo los diagramas observaremos la transhumancia que siguen las flechas del primer conjunto al tercero.



$$g*f = \{(1, 2) (2, 3) (3, 1) (4, 4)\}$$



$$f*g = \{(1, 1)\ (2, 3)\ (3, 4)\ (4, 2)\}$$

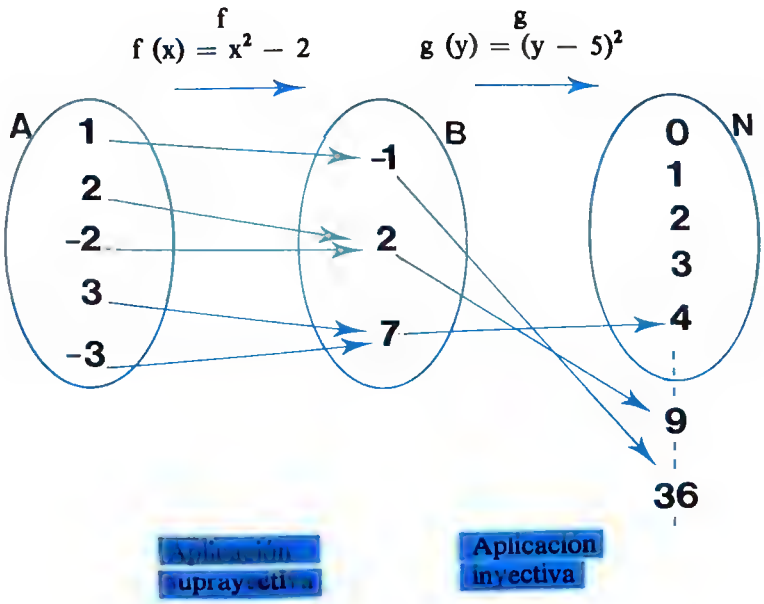
Ej.: Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, -2, 3, -3\}$, $B = \{-1, 2, 7\}$ y N donde definimos las siguientes correspondencias:

$$f : A \to B\ ;\ \forall x \in A\ :\ f(x) = x^2 - 2$$

$$g : B \to N\ ;\ \forall y \in B\ ;\ g(y) = (y - 5)^2$$

Se pide: a) Clasificar f y g.
b) Calcular g*f y clasificarla.
c) Hallar el conjunto Im (g*f).

a) Dibujemos el diagrama de flechas.



La prosperidad en la península Ibérica llegó a ser tan pujante en los últimos tiempos de la dominación romana, que después de la metrópoli, es aquí donde se encuentran más y mejores obras arquitectónicas.

La población de la península Ibérica llegó a ser mayor que en la actualidad, fijándola algunos historiadores en sesenta millones de habitantes.

Pasan de dos mil las zonas habitadas en las cuales se han hecho excavaciones y encontrado restos de aquella época.

Numerosos españoles brillaron entre las glorias romanas. Citaremos como más relacionados con los cálculos y las matemáticas a Mela, geógrafa, y a Columela, agrónomo.

Muchas ciudades gozaron del privilegio de acuñar moneda propia. La industria ofrecía productos muy renombrados, como los velos de lino de Tarragona, los tejidos de Galicia y de Játiva, las vajillas de Lusitania y los trabajos de oro y plata de Córdoba.

PROBLEMA DE MEDIDA

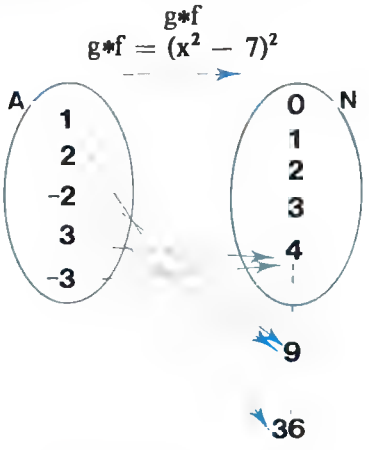
Tenemos dos vasijas, una de 5 litros y la otra de 3. Hemos de recoger exactamente cuatro litros de agua y sin la ayuda de ninguna otra vasija.

¿Cómo resolverlo?

Bien. Llenamos la vasija de 5 litros y con esta misma vasija llenamos de agua la de 3 litros. Entonces tendremos en la vasija grande dos litros y en la pequeña 3 litros. Vaciamos ahora la pequeña y vertemos en ella los 2 litros del contenido de la grande. Entonces tendremos la vasija grande (la de 5 litros) vacía y la vasija pequeña (la de 3 litros) con dos litros de agua. Volvemos a llenar la grande (5 litros) y con su contenido terminamos de llenar la pequeña (como ya tenía 2 litros sólo emplearemos uno). Tenemos entonces 3 litros en la pequeña y CUATRO en la grande.

D) Sustituiremos $f(x) = x^2 - 2$ por y en la función g(y).

$$g*f = [(x^2 - 2) - 5]^2 = (x^2 - 7)^2$$



Aplicación simplemente

C) Im (g*f) = {4, 9, 36}

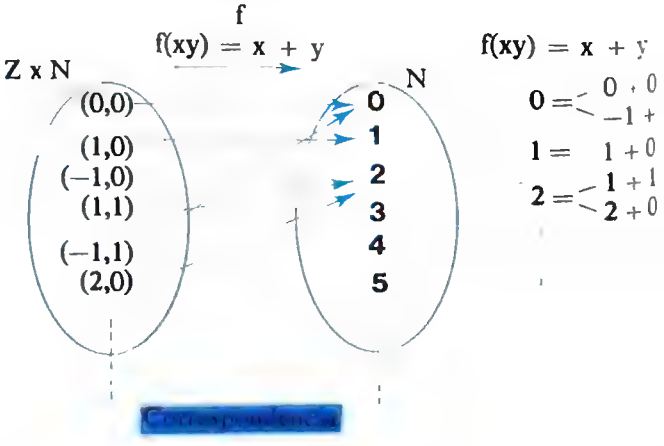
Ej.: Se considera la correspondencia $f : Z \times N \to N : f(xy) = x + y \; ; \forall x, y \in Z \times N$. Clasificar f.

En este problema tengamos en cuenta que el conjunto de partida es un conjunto producto cartesiano Z x N, luego estará formado por pares y teniendo presente que las primeras componentes de los pares pueden ser números enteros positivos y negativos ya que Z es el primer conjunto de Z x N. Sin embargo, las segundas componentes de los pares deben ser números enteros positivos, ya que N es el segundo conjunto de Z x N.

Respecto al conjunto de llegada N, no tiene nada de particular.

Así, debemos pensar que en la correspondencia que establezcamos a cada par de Z x N deberá corresponderle un elemento de N.

Como los conjuntos Z x N y N son infinitos, expondremos una muestra representativa de ellos.



Obsérvese que los pares de Z x N que tengan la primera componente negativa mayor en valor absoluto que la segunda que siempre será positiva, van a dar un resultado siempre negativo, al sumar sus respectivas componentes como indica el criterio f.

De esta forma, este tipo de pares no van a tener imagen en N, que únicamente admite resultados positivos.

11.–CLASIFICACION DE CONJUNTOS

Desde el punto de vista de las correspondencias, podemos efectuar la siguiente clasificación de conjuntos.

A) Conjuntos coordinables o equipotentes.

Dos conjuntos A y B se dice que son coordinables o equipotentes, cuando se puede establecer una aplicación biyectiva entre ambos.

Este concepto de coordinabilidad incide directamente en los siguientes conjuntos.

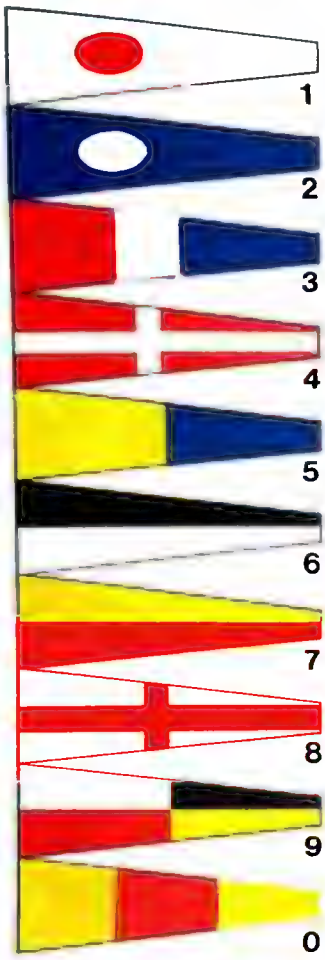
B) **Conjunto finito:** Se dice que un conjunto A es finito cuando no puede coordinarse con ningún subconjunto propio de él mismo.

C) **Conjunto infinito:** Se dice que un conjunto A es infinito cuando puede coordinarse con algún subconjunto propio de él mismo.

Otro invento muy notable que se perfeccionó en la Edad Media fue la pólvora: los árabes ya la habían conseguido mediante la purificación del salitre, que mezclado con azufre y carbón se inflama desprendiendo bruscamente gran cantidad de gases. La usaron en sus guerras contra los cristianos de España. Este producto era ya conocido por los chinos unos 1.000 años antes de C., empleándola en fuegos artificiales. Este uso artístico de la pólvora requiere gran pericia en el cálculo y mezcla de los componentes, consiguiendo así bellísimos efectos luminosos.

Otra faceta no tan agradable, la artillería, se inició en el siglo XIII y en esta época disparaban sólo bolas de piedra. Estas bolas tenían muy poco alcance.

Pero a partir del siglo XVI se fueron perfeccionando en una constante evolución que no se ha interrumpido hasta la fecha, contemplando actualmente y con verdadero horror el poder tan enorme de destrucción alcanzado por la artillería moderna.

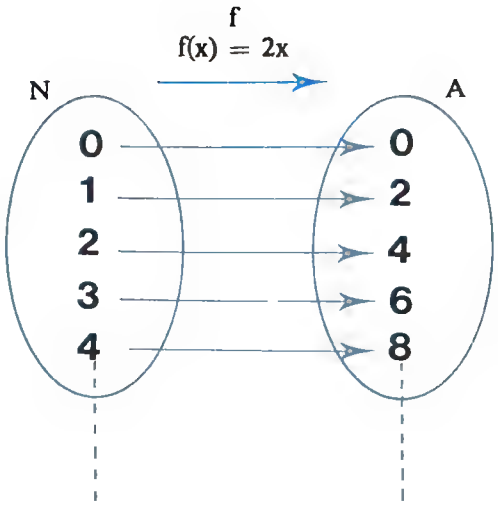


Las banderas no solamente representan a las naciones. También existe un lenguaje internacional en que cada letra es representada por una de ellas. Esta forma de entenderse fue desarrollada en la marina y existe un código internacional que lo normaliza. En el dibujo pueden verse las banderas que identifican a los números.

Ej.: En la correspondencia $f : N \to A$; $\forall x \in N : f(x) = 2x$, donde N es el conjunto de los números naturales y A es el conjunto de los números pares positivos, podemos decir:

— Que $A \subset N$ y $N \not\subset A$, luego A es un subconjunto propio de N.

— La correspondencia f es una aplicación biyectiva.



Luego el conjunto N es coordinable con el conjunto A, que además es un subconjunto propio de N. Así que el conjunto N es infinito.

D) Conjunto numerable: Cualquier conjunto A que pueda coordinarse con el conjunto N de los números naturales o con una parte de N, se dice que es numerable.

De este concepto podemos obtener las siguientes conclusiones.

1.° Cualquier finito siempre es numerable.

2.° Un conjunto infinito puede ser o puede no ser numerable.

Aclaración al texto de la página 47,
Se omitieron estos renglones que aclaran el contenido del texto:

Antiguamente el hacer «la mili» o milicia, se hacía de una manera un poco ambigua y liberal. Se comunicaba a un pueblo que si había seis personas en edad militar, tres iban y otras tres se libraban, siempre que pagasen una cuota al tesoro público.

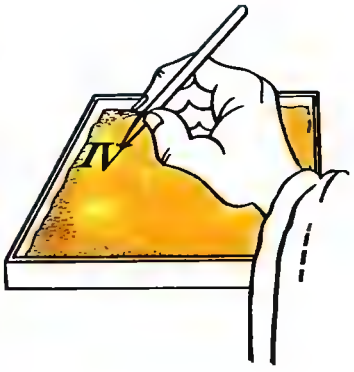
TEMA 5

RELACIONES BINARIAS

INDICE

1.–CONCEPTO DE RELACION BINARIA.
2.–PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS.
   A.–Propiedad Reflexiva.
   B.–Propiedad Simétrica.
   C.–Propiedad Antisimétrica.
   D.–Propiedad Transitiva.
   E.–Normas para plantear las propiedades.
3.–TIPOS DE RELACIONES BINARIAS.
   A.–Relación de equivalencia.
      1.° Partición.
      2.° Clase de Equivalencia. Representante de clase. Elementos equivalentes.
      3.° Conjunto cociente.
   B.–Relaciones de orden.
      1.° Relaciones de orden total.
      2.° Relaciones de orden parcial.
      3.° Gráfico de las relaciones de orden. Diagramas de Hasse.
4.–ELEMENTOS NOTABLES DE UNA PARTE DE UN CONJUNTO ORDENADO.
5.–PARTES NOTABLES DE UN CONJUNTO ORDENADO.
6.–CONJUNTO CONVEXO.
7.–CONJUNTOS BIEN ORDENADOS.

TEMA 5



En la Edad Media se adoptaron definitivamente las cifras árabes. Como el papel todavía no era de uso corriente, se seguía utilizando el ábaco de tablilla, cubierta de polvo o arena muy fina, lo que permitía borrar y corregir los resultados provisionales.

Cuando se consiguió fabricar papel a precios asequibles, el método anterior fue abandonado por sus limitaciones evidentes y tuvieron que adaptar sus cálculos hacia la forma actual de las diversas operaciones.

RELACIONES BINARIAS

1.–CONCEPTO DE RELACION BINARIA

Antes de introducirnos en el tema, hay que hacer notar que una relación binaria es un caso particular de correspondencias, es decir, es lo mismo, si tenemos en cuenta que en las correspondencias lo que hacíamos generalmente era relacionar los elementos de dos conjuntos distintos (en ocasiones iguales), sin embargo en las relaciones binarias lo que se hace es relacionar los elementos de un único conjunto.

Dada la importancia de las relaciones binarias y sus consecuencias, es por lo que estudiamos el tema separada y ampliamente.

Pues bien, se entiende por relación binaria a cualquier criterio o propiedad que permita asociar los elementos de un conjunto A, según pares o parejas.

Se suelen representar genéricamente por el símbolo:

$$xRy \ ; \ \forall x, \ y \in A$$

que se lee o interpreta como que: "Dos elementos cualquiera x e y del conjunto A están relacionados o vinculados por el criterio o propiedad R que se cite concretamente en el problema en cuestión". (Obsérvese que el criterio R de las relaciones binarias es similar al criterio f de las correspondencias.)

Este criterio se puede expresar de diversas formas:

Como cualquier relación binaria asocia los elementos de un conjunto según pares, es sabido que su representación general se puede expresar de las dos formas siguientes:

$$xRy \equiv (x, y)$$

Como consecuencia, podemos deducir que tanto las primeras como las segundas componentes de una relación binaria deberán ser elementos que pertenezcan al único conjunto A donde se haya definido tal relación.

Así, para poder realizar cualquier problema de relaciones binarias es necesario que poseamos los datos siguientes:

- El conjunto donde se define la relación binaria.
- El criterio que [illegible]

En cualquier relación binaria definida en un conjunto A es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1.º En un conjunto A se puede definir generalmente más de una relación binaria.

Ej.: En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definimos la siguiente relación binaria R : "Dos elementos de A están relacionados cuando la primera componente sea menor que la segunda".

Como observamos nos dan un conjunto A y el criterio que permite relacionar los elementos de A, luego el problema está inicialmente bien definido.

Estudiando lo que nos ocupa, también pensamos que el criterio podía haber sido al revés, obteniendo así una relación binaria diferente.

2. Cualquier relación binaria definida en un conjunto A es siempre un subconjunto de $A \times A$ o de A^2.

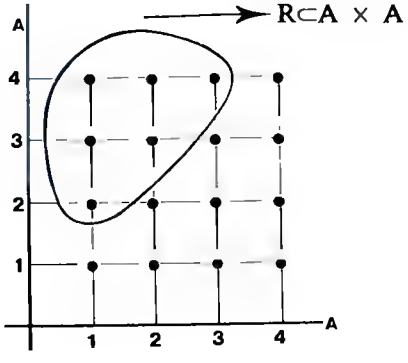
Ej.: Obsérvese en el ejemplo anterior:

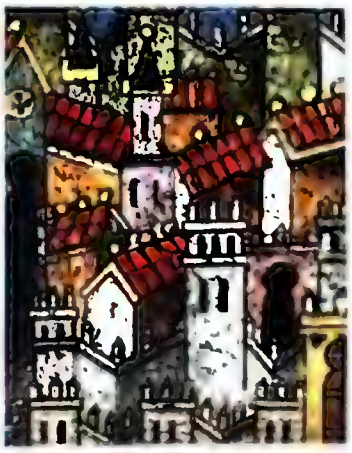
$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1, 2)\ (1, 3)\ (1, 4)\ (2, 3)\ (2, 4)\ (3, 4)\}$

$A \times A = A^2 = \{(1, 1)\ (1, 2)\ (1, 3)\ (1, 4)\ (2, 1)\ (2, 2)\ (2, 3)\ (2, 4)\ (3, 1)\ (3, 2)\ (3, 3)\ (3, 4)\ (4, 1)\ (4, 2)\ (4, 3)\ (4, 4).\}$

Donde podemos observar que el criterio R es un subconjunto de $A \times A$ ($R \subset A \times A$). Vamos a hacer un diagrama cartesiano para verlo más claro:

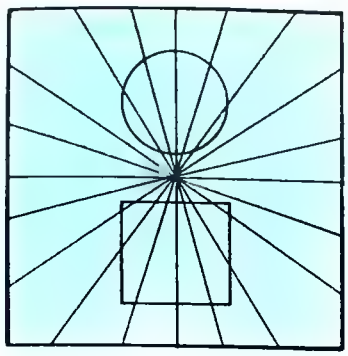




El comercio fue durante la Edad Media un medio de enriquecimiento. Pero el ser comerciante en aquella época no resultaba tan tranquilo como en la actualidad. El dominio de las matemáticas, el correcto uso de las diferentes monedas y de sus equivalencias, tenía que combinarse con el uso de las armas de defensa.

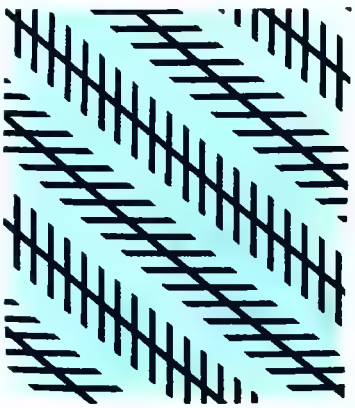
El transporte de mercaderías de una ciudad a otra era muy arriesgado; se veían obligados a viajar en caravanas llevando consigo la espada para defenderse de los bandidos.

Los reyes y señores feudales acuñaban su moneda, pero como el oro y la plata escaseaban, la ley de estas monedas fue muy diferente, y así se dieron engaño en el valor real de ellas. Fue preciso que personas instruidas, que conocieran bien las aleaciones monedables y que pudieran calcular su valor, se establecieran en las ciudades para garantizar el valor de las mismas.

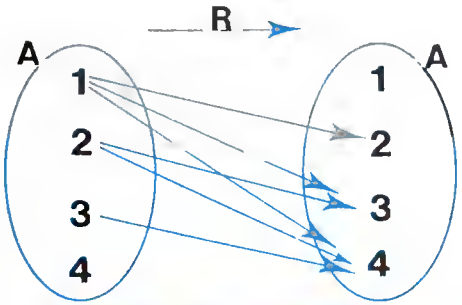


ILUSIONES OPTICAS

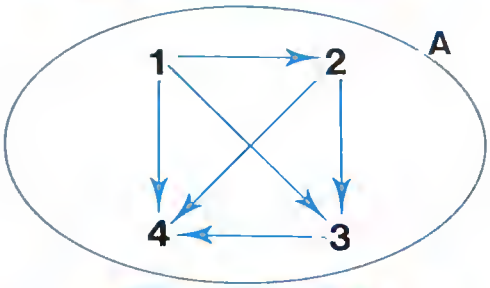
Las figuras geométricas se prestan fácilmente a que seamos víctimas de grandes errores, en algunos casos los cuadrados no parecen tales, líneas paralelas parecen no serlo. De forma semejante, los colores nos producen efectos engañosos. Los pintores saben —y lo manejan en sus lienzos— que los colores llamados cálidos, es decir, la gama de los rojos, parece acercarse a nosotros y la gama de los fríos, los azules, dan sensación de lejanía, así como un color blanco parece más blanco si está colocado junto a uno muy oscuro o negro, y viceversa, para destacar un oscuro se tiene que rodear de tonos claros.



NOTA.—Como observamos hasta ahora, todo es parecido a las correspondencias. Podíamos expresarlo en un diagrama de flechas:



representación no usada en las relaciones binarias



representación usada en las relaciones binarias

2.—PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS

El conocimiento de las propiedades de las relaciones binarias es fundamental, ya que son el objetivo para consecuencias importantísimas.

A.—Propiedad reflexiva

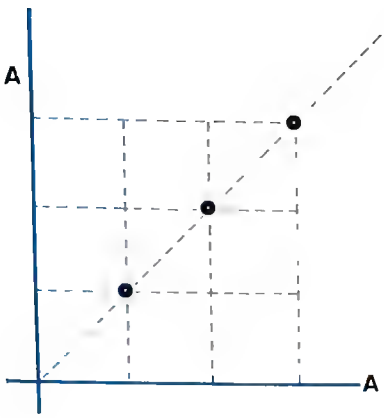
Es cuando todo elemento de un conjunto A tiene aptitud para estar relacionado consigo mismo según el criterio que se cite R.

Se representa por:

$$xRy \longrightarrow xRx \ ; \ \forall x, y \in A$$

Su representación gráfica según el diagrama de flechas es:

Su representación gráfica segun un diagrama cartesiano es:



Es decir, tòdos los elementos o pares de A × A que estén en la diagonal.

Ej.: En el conjunto de los humanos se define la relación binaria "Dos personas están relacionadas si tienen el mismo color de ojos".

Del conjunto de los humanos vamos a elegir dos personas que tengan el mismo color de ojos, que harán las veces de x e y, por ejemplo, Pepe y Juan.

$$xRy \longrightarrow xRx$$

Pepe "tiene el mismo color de ojos que" Juan → Pepe "tiene el mismo color de ojos que" Pepe.

No hay duda que Pepe tiene el mismo color de ojos que él mismo, luego se cumple la propiedad reflexiva para cualquier elemento del conjunto de los humanos.

Ej.: En el conjunto de las personas, definimos la relación binaria: "ser hijo de".

Si elegimos dos personas, Ana y María, que efectivamente sean madre e hija, podemos plantear:

$$x\ R\ y \longrightarrow x\ R\ x$$

Ana "es hija de" María Ana "es hija de" Ana

Observamos que cualquier persona no puede ser hija de sí misma, luego la propiedad reflexiva no se cumple.

Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3} se define la siguiente relación binaria dada por los pares: (1, 1) (1, 2) (2, 2) (2, 3) (3, 3).

Cuando una relación binaria venga expresada por pares, la comprobación de sus propiedades se hace con más sencillez dibujando un diagrama de flechas.

Recuerdo un problema que nos puso el profesor en la escuela.

Un barco está fondeado en el puerto. Tiene una escala sujeta a la borda para poder embarcar en los botes. Dicha escala tiene 10 peldaños de 25 cm. de altura cada uno. La marea sube a razón de 12,5 cm. por hora. ¿Cuántos escalones subirá la marea después de 10 horas?

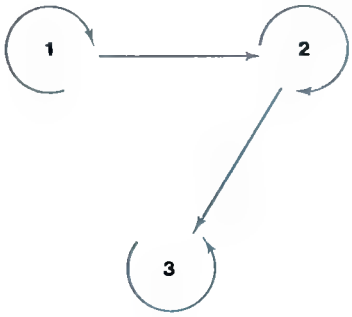
SOLUCION

La escala, al estar sujeta a la borda, forma parte del barco y éste siempre flota. Luego la distancia entre la línea de flotación y la borda se mantiene inalterable, exista marea o no.

A pesar de la seriedad de nuestro profesor, le gustaba plantear problemas que nos hicieran agudizar el ingenio.

La civilización Inca construyó obras grandiosas en las que emplearon ingentes cantidades de piedra. Rocas enormes que tuvieron necesariamente que transportarlas desde canteras muchas veces muy lejanas con grandes obstáculos difíciles de atravesar. Barrancos profundos, valles encajonados e incluso torrenteras impetuosas. Todo nos hace pensar que los arquitectos Incas tuvieron que enfrentarse y resolver innumerables problemas, ya que aparte del transporte por tierra, debían hacer transportes fluviales, y esto en una zona donde las únicas embarcaciones conocidas estaban echas con cañas y juncos trenzados, como puede verse hoy día en las riberas del lago Titicaca.

El misterio que rodea la construcción de estos enormes edificios ha suscitado el interés de los estudiosos y ha dado pie a curiosas teorías, como la del austriaco Hoerbiger, que cree en la existencia de una raza de gigantes. Sólo así nos explicaríamos el porqué de tan descomunales edificios.



Como todos los elementos de A, están relacionados consigo mismo, ya que todos tienen un bucle que es la característica de que se cumple la reflexiva en un diagrama de flechas.

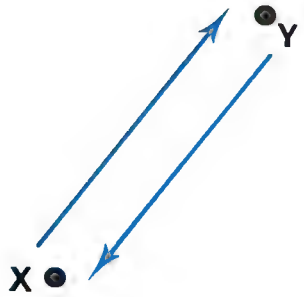
B.—Propiedad simétrica

Es cuando dos elementos de un conjunto A tienen aptitud para estar relacionados en un sentido y en otro según el criterio R que se cite:

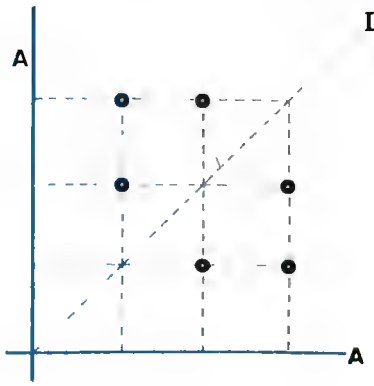
Se representa por:

$$x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x\ ;\ \forall\ x\ y \in A$$

Su representación gráfica según un diagrama de flechas es:



Su representación gráfica según un diagrama cartesiano es:



Es decir, todos los elementos simétricos respecto de la diagonal, a un lado y a otro de ésta.

Ej.: En el conjunto de los humanos se define la relación binaria: "Ser hermano de".

Elegimos dos personas que sean hermanos, Pepe y Juan.

$$x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$$

Pepe "es hermano de" Juan → Juan "es hermano de" Pepe

Observamos que sí se cumple la simétrica, ya que entre dos personas que sean hermanos es igual el orden en que se diga.

Ej.: En el conjunto de las personas se define la relación binaria: "ser hijo de".

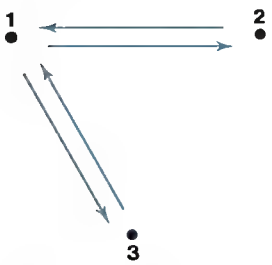
Elegimos dos personas que sean una de ellas hijo de la otra, Ana y Juan.

$$x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$$

Ana "es hija de" Juan → Juan "es hijo de" Ana

Obsérvese que no se cumple la simétrica, ya que si Ana es hija de Juan, es imposible que sea al revés.

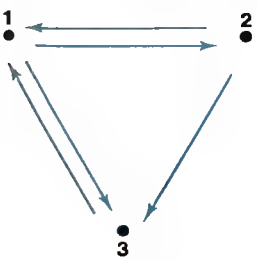
Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3} se define la relación binaria R dada por los pares: (1, 2) (1, 3) (2, 1) (3, 1).



Se cumple la propiedad simétrica. Para que ocurra esto en un diagrama de flechas, siempre que exista entre dos elementos una flecha que vaya, debe existir otra flecha que venga, para cualesquiera dos elementos del conjunto donde han definido la relación.

Sin embargo, para dejar clara esta idea, vamos a proponer una serie de ejemplos al margen del que nos ocupaba.

Ej.: Averiguar si en los diagramas de flechas siguientes se cumple la propiedad simétrica en el conjunto A = 1, 2, 3.



En este caso no se cumple la simétrica porque existe un caso, el (2, 3), pero no existe el contrario (3, 2).

Pérgamo, ciudad de Asia Menor, tenía en tiempos de Eumenes II una biblioteca, célebre en el mundo conocido, compuesta por 200.000 volúmenes.

Cuando los romanos se apoderaron de este reino, Antonio regaló esta biblioteca a Cleopatra. En esta ciudad, a instancias de su rey, se empezó a utilizar para escribir la piel de res limpia del pelo, adobada y estirada y que después de múltiples experiencias consiguió ser usada por todos los amanuenses a plena satisfación. Se llamó Pergamino en honor a la ciudad en que primero se utilizó y permitió librarse de la dependencia de papiro.

Los pergaminos fueron utilizados además para escribir los códices, para consignar los privilegios que otorgaban los reyes a sus nobles.

Su uso se extendió rápidamente y fue utilizado por todos los países hasta la introducción del papel en Europa.

Los maestros de los distintos oficios (tejedores, tintoreros, areneros, cuchilleros, etc.) ocupaban en las ciudades medievales la planta baja de sus viviendas, con el taller en el que ejercían su oficio abierto a la calle.

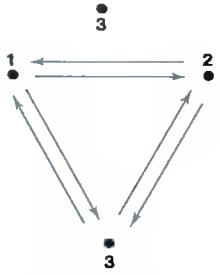
Se agrupaban en una misma calle o barrio, por eso es muy común en nuestras ciudades que todavía se conserven calles o zonas con el nombre de algún oficio.

En estos talleres el maestro empleaba fórmulas, medía y pesaba ingredientes, según requería su trabajo, pero conservando el más riguroso secreto de su saber; éste se transmitía de los maestros a los aprendices, después de muchísimos años de profesión, empezando con las labores más elementales, y si el aprendiz inspiraba confianza al maestro, podía ser depositario de la parte técnica del trabajo.

Se cumple la simétrica porque existe el caso (1, 2) y su contrario (2, 1). Entre el 1 y el 3, y el 2 y el 3, no hay lugar a comprobar porque no existe ninguna flecha que vaya, luego no tenemos que mirar a ver si existe alguna que venga.

Se cumple la simétrica.

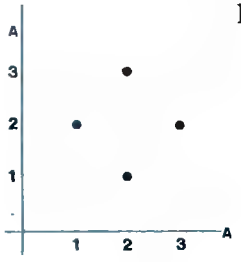
No se cumple la simétrica.



Se cumple la simétrica.

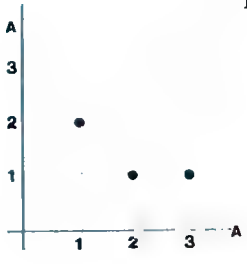
Ej.: Averiguar si en los diagramas cartesianos siguientes se cumple la propiedad simétrica.

Diagonal



Sí se cumple la simétrica, porque los puntos de la relación todos tienen su simétrico respecto a la diagonal.

Diagonal



No se cumple la simétrica, porque el elemento (3, 1) no tiene simétrico respecto de la diagonal.

C.—Propiedad Antisimétrica

Generalmente esta propiedad es la contraria de la simétrica, es decir que si se cumple la simétrica no se cumple la antisimétrica y si no se cumple la simétrica pueda o no que se cumpla la antisimétrica. Es decir, la simétrica y la antisimétrica no se pueden cumplir a la vez pero sí puede ocurrir que no se cumpla ninguna de las dos.

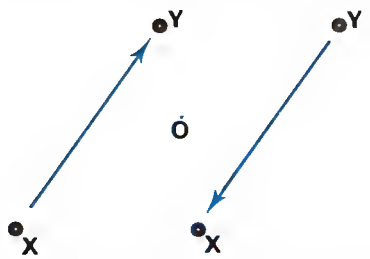
Corrientemente se suele determinar si se cumple o no esta propiedad en función de lo que ocurra con la simétrica.

En general es cuando dos elementos cualquiera de un conjunto A tienen aptitud para estar relacionados solamente en uno de los sentidos, según el criterio R que se cite.

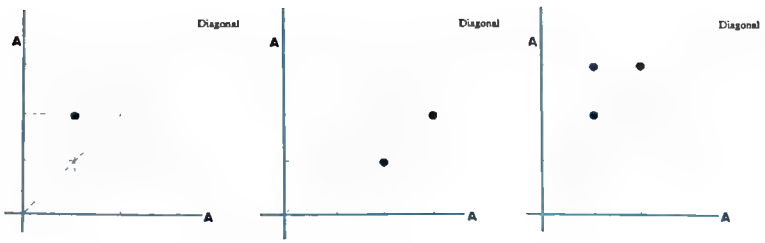
Se representa por:

$$x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x \qquad \forall\ x, y \in A$$

Su representación gráfica según un diagrama de flechas es:



Su representación gráfica según un diagrama cartesiano puede ser:



Es decir, que no todos los elementos deben ser simétricos respecto a la diagonal del diagrama.

Ej.: En el conjunto de las rectas de un plano se define la relación binaria R entre ellas como de "perpendicularidad".

Es natural que si elegimos dos rectas de ese plano que sean perpendiculares a y b.

$$x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x$$

a "perpendicular" b $\longrightarrow$ b "perpendicular" a.

Observamos que se cumple la propiedad en un sentido y en otro, luego se cumple la simétrica pero no la antisimétrica.

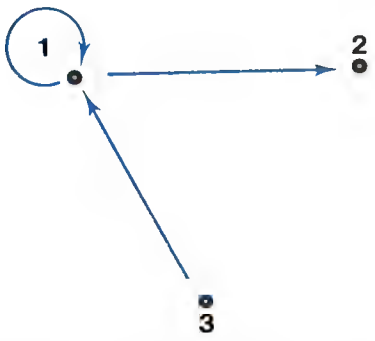
El cuerpo humano contiene grasa suficiente para hacer siete pastillas de jabón, carbón equivalente a 13 kilos de coque, el hierro existente en un clavo de 2,5 cm., cal suficiente para encalar un pequeño cobertizo y fósforo suficiente para 2.200 cerillas. Tiene además azufre equivalente a una cucharada colmada; 28 g. de metales diferentes al hierro; 5 millones de cabellos; 1,8 m² de piel; 650 músculos; 206 huesos; 96.000 kilómetros de arterias, venas y capilares y 13.000.000.000 de células nerviosas.

Durante cada minuto de nuestra vida el corazón bombea 4,70 litros de sangre (casi el doble en un ejercicio violento).

Los vasos capilares, finísimas tuberías que sirven al torrente sanguíneo, tienen una superficie tal que cubriría un campo de más de 5.000 m.².

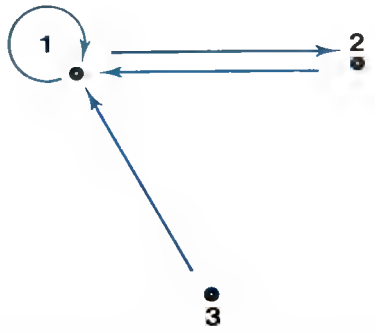
En el transcurso de una vida media respiramos unos 500 millones de veces.

Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3} se define la relación binaria R por los pares: (1, 2) (1, 1) (3, 1).



No se cumple la simétrica, porque el par (3, 1) no tiene el par (1, 3), y el par (1, 2) no tiene el par (2, 1), pero sí se cumple la antisimétrica.

Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3} se define la relación binaria R por los pares: (1, 2) (1, 1) (2, 1) (3, 1).



Obsérvese que no se cumple la simétrica con el par (3, 1) porque no existe el par (1, 3), sin embargo sí se cumple la simétrica con el par (1, 2) porque existe el par (2, 1).

Es decir, que entre los elementos 1 y 2 se cumple la simétrica y entre los elementos 1 y 3 se cumple la antisimétrica (entre los elementos 2 y 3 no hay nada que decidir porque no están vinculados de ninguna forma por la relación binaria dada), lo cual pone de manifiesto que no podemos asegurar en este conjunto y con esta relación binaria, que se cumpla la simétrica o la antisimétrica. Es decir, no se cumple ninguna de las dos.

En los fondos de los mares es sabido que se reproduce el perfil de las montañas, y así lo que en la superficie son nuestros valles en el fondo marino son los abismos; éstos han sido medidos con precisión en los últimos tiempos, y sucesivas exploraciones han llegado hasta los 10.917 m.

Esta proeza fue realizada por el batiscafo Trieste, pilotado por el Dr. Piccar que tocó el fondo del océano el día 23 de enero de 1960. Se tardaron 4 horas y 48 minutos en descender a la fosa Challenger, de la depresión de las Marianas, en el Océano Pacífico.

En estas profundidades se creía que no existía ningún tipo de vida. Los estudios posteriores han demostrado la existencia de seres acondicionados especialmente para desenvolverse en este medio. La enorme presión que han de soportar (1.183 kg/cm.^{2}) hace que no tengan esqueleto, ni partes rígidas. Como la luz solar nunca llega, ellos suelen tener partes luminosas, y por último, son todos camívoros, ya que no existe vida vegetal, y en general disponen de dentaduras muy desarrolladas, con fuertes mandíbulas. Su tamaño no sobrepasa el metro de longitud.

D.—Propiedad Transitiva

Esta propiedad es necesario comprobarla con dos premisas (al contrario que las anteriores que sólo necesitaban una premisa) para luego estudiar la conclusión.

Su planteamiento y representación es como sigue para tres elementos cualesquiera de un conjunto A, donde se define la relación R:

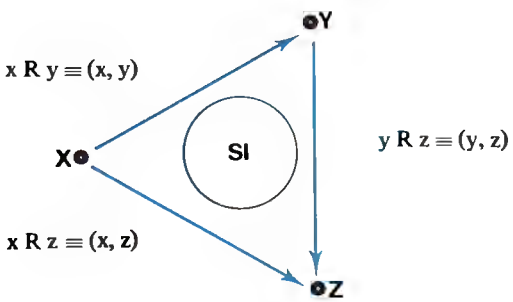
$$\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow x\ R\ z \qquad \forall\ x, y, z \in A$$

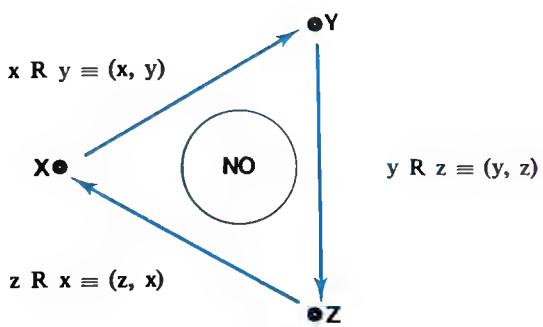
Para su planteamiento se necesita que el elemento en el que acabe la primera premisa (en y) sea el mismo por el que comience la segunda premisa (en y).

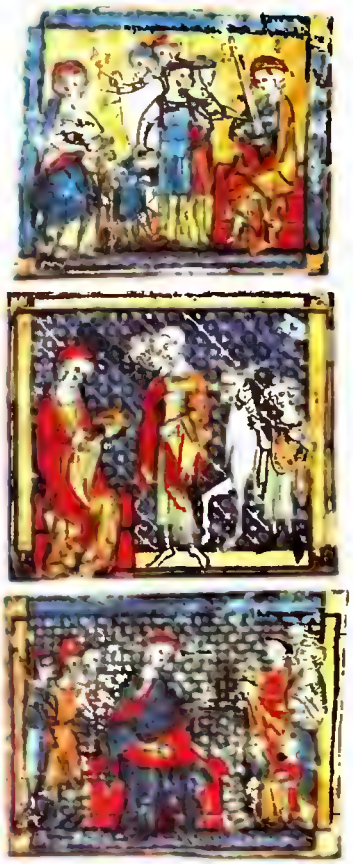
Los tres elementos x, y, z pueden ser distintos o iguales cuando se haga el planteamiento.

El estudio de sus representaciones gráficas es más complejo que en las anteriores propiedades y generalmente para su comprobación es conveniente recurrir al planteamiento general de la propiedad.

Su representación gráfica mediante un diagrama de flechas es:







Los trabajos de los miniaturistas ilustradores de códices, están inspirados muchas veces en un estilo marcadamente oriental. Las influencias persas son notables en muchas de estas letras capitales, que ilustran los primeros manuscritos y pergaminos.

Tales influencias, se derivaron probablemente a las expediciones que realizaron los cristianos a Tierra Santa, para rescatar los Santos Lugares. Estas se llamaron Cruzadas y fueron ocho, entre el año 1096 al 1270. Tenían por misión rescatar Jerusalén.

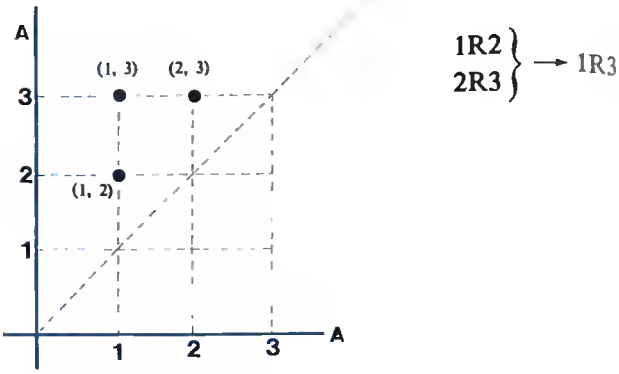
Los cruzados, a su vuelta a los países de origen, trajeron a Europa, además de muchas obras artísticas, las peculiaridades de aquella civilización y sus modos de ver las ciencias exactas.

La vía comercial más antigua y más larga de la que se tiene noticia es la denominada "Ruta de la seda". Fue muy frecuentada en la antigüedad ya que unía las principales ciudades chinas con Tiro, en la costa mediterránea.

Ruta de intercambios, era la única vía de contacto con el hermético mundo chino. Las pistas serpenteaban por todo el Norte de Asia hacia la legendaria Katai; no obstante y a pesar de su longitud, no han quedado muchos vestigios de antaño; se borraron en infinidad de guerras locales o se perdieron en un pasado misterioso. Esta vía cruzaba uno de los desiertos más grandes, el desierto de Gobi, en el Asia Central. En estas infinitas estepas el calor resulta insoportable en verano y en invierno el frío es extremadamente agudo.

En este desierto se han encontrado bosques fosilizados que hace millones de años debieron albergar dinosaurios. En el lecho de un río seco se descubrieron restos de mamíferos prehistóricos y fósiles de mejillones.

Su representación gráfica mediante un diagrama cartesiano es:



Ej.: En el conjunto de las rectas de un plano se define entre ellas la relación binaria de: "paralelismo".

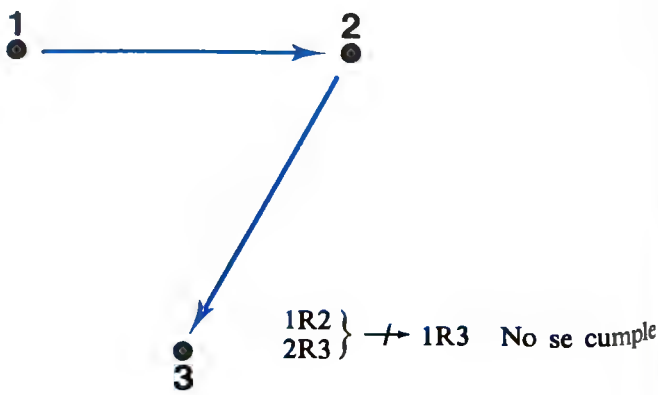
Elegimos tres rectas del plano a, b, c y planteamos las premisas ciertas:

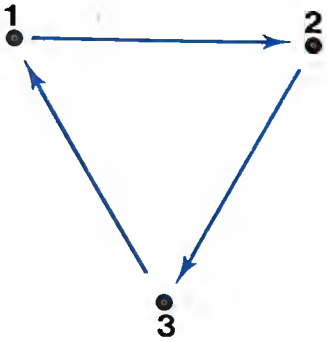
$$\left.\begin{matrix} xRy \\ yRz \end{matrix}\right\} \longrightarrow xRz$$

$$\left.\begin{matrix} a \text{ "paralela" } b \\ b \text{ "paralela" } c \end{matrix}\right\} \longrightarrow a \text{ "paralela" } c$$

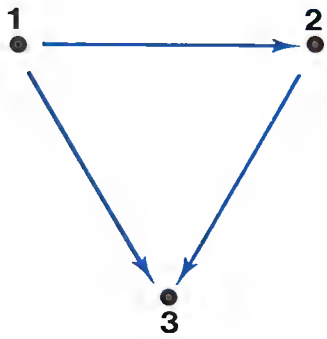
Efectivamente, la conclusión es cierta, luego la propiedad transitiva se cumple.

Ej.: Averiguar si en los diagramas de flechas siguientes se cumple la propiedad transitiva en el conjunto A = {1, 2, 3}.

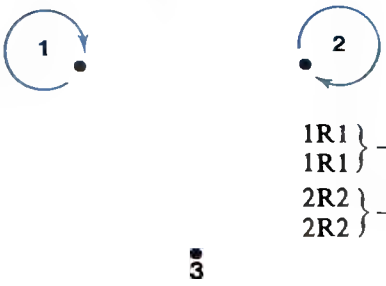




1R2 }
2R3 } → 1R3 No se cumple



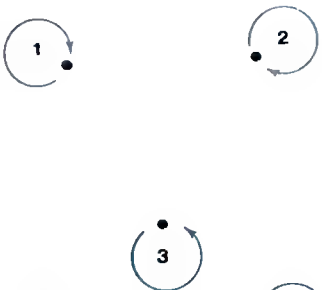
1R2 }
2R3 } → 1R3 Sí se cumple



1R1 }
1R1 } → 1R1

2R2 }
2R2 } → 2R2

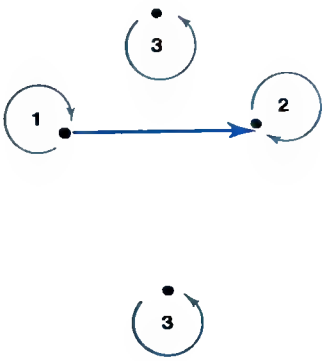
Sí se cumple. Obsérverse que en este caso no existen más posibilidades que comprobar la transitiva con un único elemento.



1R1 }
1R1 } → 1R1

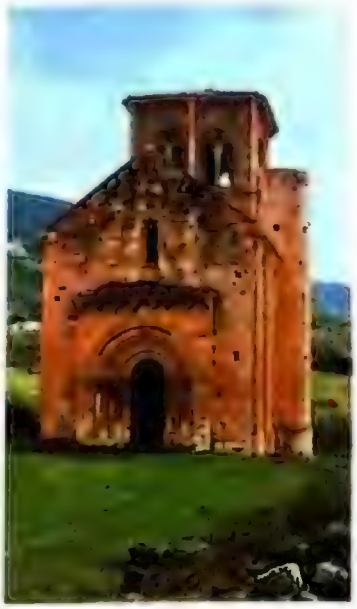
2R2 }
2R2 } → 2R2 Sí se cumple

3R3 }
3R3 } → 3R3



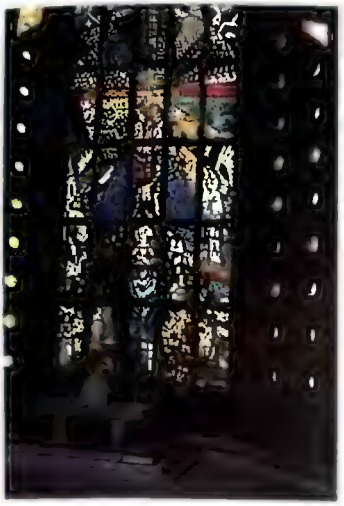
Sí se cumple, lo mismo que el anterior. Aunque puedo plantear la premisa cierta 1R2, no queda más remedio que plantear en este caso la propiedad como:

1R2 }
2R2 } → 1R2



Pasado el año mil sin que se cumplieran los temores supersticiosos que atribuían a esta fecha el cataclismo total, el fin del mundo y la destrucción del planeta, la humanidad sintió el gran alivio de aquel terror, y el optimismo que renació en los corazones influyó e hizo que se operase un cambio notable en la arquitectura. Las órdenes monásticas se lanzaron con sus mejores hombres a construir iglesias y conventos, para dar gracias a Dios.

Además del arco de medio punto, que fue haciéndose más grande, se construyeron bóvedas cada vez más atrevidas. Los cálculos se hacían mucho más complicados; se reforzaron los muros, construyéndose macizos, contrafuertes adosados a los mismos por su parte exterior.



Durante los siglos XIII al XVI, se desarrolló en las principales ciudades de España el arte de las vidrieras. Las grandes vidrieras que todavía podemos admirar en nuestras catedrales, constituidas por vidrios de diferentes colores, formando figuras o composiciones, tan sólo se empleaban en las iglesias y en los palacios de los reyes y grandes señores. Fueron muy usadas en el estilo gótico y en el renacimiento. Los vidrios van rebordeados de unos canutillos de plomo soldados entre sí.

Las vidrieras de las principales catedrales con grandes superficies, necesitaron un cálculo para conseguir una resistencia especial contra el viento. Esta se conseguía cruzando unas fuertes barras de hierro de medidas determinadas que se integraban o disimulaban en el dibujo.

E.—Normas para plantear las propiedades

El planteamiento de las propiedades de las relaciones binarias exige inicialmente un conocimiento perfecto de éstas y después una aplicación adecuada de ellas, según la filosofía con la que están expuestas.

Para ello indicaremos la tónica general con la que deben ser aplicadas.

1.º Todos los elementos que utilicemos en su comprobación deberán pertenecer necesariamente al conjunto en donde se haya definido la relación binaria.

2.º Habremos observado que todas las propiedades se plantean a la izquierda con una o unas premisas y a continuación la flecha implica o no implica que se debe de cumplir o no cumplir la consecuencia de la derecha de tal flecha. Recordemos:

$$\text{Reflexiva:} \quad x\ R\ y \longrightarrow x\ R\ x$$

$$\text{Simétrica:} \quad x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$$

$$\text{Antisimétrica:} \quad x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x$$

$$\text{Transitiva:} \quad \left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow x\ R\ z$$

Pues bien, es absolutamente necesario que las premisas de la izquierda de la flecha y de cada propiedad sean absolutamente ciertas para luego estudiar si las consecuencias de la derecha de la flecha y de cada propiedad son ciertas (se cumple la propiedad), o falsas (no se cumple la propiedad). Téngase en cuenta que el principio fundamental de la lógica dice que si se parte de premisas falsas, nunca podremos saber si la conclusión es verdadera o falsa.

3.º Comprobada cada propiedad con los criterios anteriores, debemos extender la conclusión a todos los elementos del conjunto, para decidir si a todos se les puede aplicar la conclusión (la propiedad se cumple), o existe algún caso que no responde a la conclusión (la propiedad no se cumple).

Cuando al comprobar una propiedad, observemos que existe al menos un caso en que no se cumple, es suficiente para indicar o invalidar la propiedad para todos los elementos del conjunto.

4.º Cuando la relación binaria R esté expresada mediante una frase, generalmente con comprobar un caso y extenderlo razonadamente a todos los elementos del conjunto es suficiente para asegurarse de si la propiedad se cumple o no se cumple. (Esta forma suele plantearse en conjuntos infinitos de elementos.)

Cuando la relación binaria R esté expresada mediante pares, tendremos que actuar con más cuidado y comprobar todos los casos que sean posibles para asegurarnos la respuesta (esta forma suele plantearse en conjuntos finitos de elementos).

Ej.: En el conjunto N se define la siguiente relación binaria: "Dos números cualesquiera están relacionados si acaban en la misma cifra". Comprobar las propiedades.

Ya sabemos que N es el conjunto de los números naturales {0, 1, 2, 3, ...} y la relación binaria R es en este caso "acabar en la misma cifra". Planteemos las propiedades:

1.° Reflexiva: x R y ⟶ x R x

Si elegimos dos números que cumplan a R, por ejemplo 20 y 30, 20 está relacionado con 30 por acabar en la misma cifra, luego 20 va a estar relacionado consigo mismo por terminar evidentemente en la misma cifra.

20 "acabar en la misma cifra" 30 ⟶ 20 "acabar en la misma cifra" 20

Si lo hacemos extensivo a todos los números del conjunto, vemos que siempre se va a cumplir la reflexiva.

2.° Simetrica: x R y ⟶ y R x

20 "acabar en la misma cifra" 30 ⟶ 30 "acabar en la misma cifra" 20

Luego se cumple para cualquier par de elementos que están relacionados según R.

3.° Antisimetrica: x R y ⟶ y R x; como se cumple la simétrica no se cumple la antisimétrica.

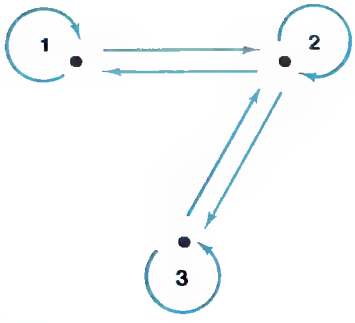
4.° Transitiva: $\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow x\ R\ z$

$\left.\begin{matrix} 20 \text{ "acabar en la misma cifra" } 30 \\ 30 \text{ "acabar en la misma cifra" } 40 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ 20 "acabar en la misma cifra" 40

Luego se cumple para cualquier par de elementos que estén relacionados según R.

Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3} se define la siguiente relación binaria: (1, 1) (1, 2) (2, 1) (2, 2) (3, 3) (2, 3) (3, 2). Comprobar las propiedades.

En este caso, vamos a dibujar el diagrama de flechas.



1.° Reflexiva: x R y ⟶ x R x

Cada elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo por tener un bucle, que es la manifestación original de la reflexiva en un diagrama de flechas, luego se cumple.

En Inglaterra se descubrieron unas minas de grafito-carbono casi puro y casualmente se vio que este mineral graso y blando dejaba una huella permanente sobre el papel; rápidamente se pensó en su utilización para la escritura. Se cortó en delgadas barritas y se creó una especie de portaminas metálico muy rudimentario que permitía, por medio de una abrazadera que hacía presión sobre dos láminas metálicas, sujetar el mineral, permitiendo su uso sin mancharse las manos.

Por necesidad y debido a la escasez de grafito, el químico CONTE consiguió obtenerlo artificialmente mediante la mezcla de granito pulverizado y arcilla. Esta mezcla se fabricó en tiras muy finas que se forraban de un tubo de madera para darle resistencia.

Este modelo de lápiz es el que se usa en la actualidad con variaciones y perfeccionamientos conseguidos por la fabricación industrializada.

Los lápices de colores sólo varían en que la arcilla se mezcla con colorantes apropiados.

Los comerciantes de la Edad Media que ya tenían gran volumen de negocios en todo el mundo conocido, tuvieron que organizar sucursales en las ciudades más importantes. Por aquella época los bandidos, numerosos y bien organizados, que asolaban los caminos, les hacían difícil el tráfico de mercaderías y sobre todo del dinero.

Para asegurarse la vida de estos centros de canje y producción inventaron los pagarés, crearon sistemas de seguros y perfeccionaron la contabilidad.

Ciertas ciudades con comercio muy floreciente obtuvieron "Cartas o Franquicias" que de hecho las convirtieron en verdaderas y pequeñas repúblicas, que podían establecer libremente las contribuciones y realizar las obras públicas más convenientes para su desarrollo.

2. Simétrica: $x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$

En el gráfico observamos que siempre que existe una flecha que va, hay otra que vuelve, luego se cumple.

3. Antisimétrica: $x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x$

Como se cumple la simétrica, no se cumple la antisimétrica.

4 Transitiva: $\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow y\ R\ z$

Observando el diagrama, podemos plantear dos premisas verdaderas que conducen a una conclusión falsa:

$$\left.\begin{matrix} 1\ R\ 2 \\ 2\ R\ 3 \end{matrix}\right\} \not\longrightarrow 1\ R\ 3$$

Luego la propiedad no se cumple.

3.–TIPOS DE RELACIONES BINARIAS

Después de comprobar las propiedades de una relación binaria, el siguiente paso es clasificar la relación binaria en cuestión.

Para ello vamos a estudiar ampliamente cada uno de los tipos que existen;

A.– Relaciones de equivalencias

Se llaman así a las relaciones binarias que cumplen las propiedades Reflexiva, Simétrica, Transitiva

Cualquier relación de equivalencia R definida en un conjunto A produce las siguientes e importantes consecuencias:

1. Cualquier relación de equivalencia produce una partición en el conjunto en que se ha definido. Cada una de las partes de la partición está constituida por los elementos que son iguales entre sí, respecto a la relación de equivalencia dada.

Cada una de las partes de la partición, provocada por la relación de equivalencia, recibe el nombre de clase de equivalencia. Las clases de equivalencia se suelen representar por $\subset(x)$, siendo x cualquier elemento de una misma clase de equivalencia y recibe el nombre de representante de clase.

Dos elementos cualquiera de una misma clase de equivalencia reciben el nombre de elementos equivalentes.

El conjunto formado por todas las clases de equivalencia recibe el nombre de conjunto cociente y se representa por A/R (la letra A variará según el nombre que reciba el conjunto donde se produce la relación de equivalencia).

Hay que hacer notar que el conjunto A y el A/R son el mismo conjunto. La diferencia estriba en que se prefiere la notación A/R cuando se trata de poner de manifiesto que los elementos de A han sido clasificados según clases de equivalencia.

Ej.: En el conjunto Z se define la siguiente relación binaria R: "Dos números cualesquiera están relacionados si dan el mismo resto al dividirlos por 3".

Inicialmente tengamos en cuenta que vamos a trabajar en el conjunto Z, es decir, con números enteros positivos y negativos.

Pues bien, el primer paso es comprobar las propiedades de las relaciones binarias para luego decidir:

1.° Reflexiva: $x\ R\ y \longrightarrow x\ R\ x$

Por ejemplo, elegimos dos números de Z que cumplan la relación (téngase en cuenta que siempre se ha de partir de premisas ciertas), el 7 y el 10.

7 "mismo resto al dividir por 3" 10 $\longrightarrow$ 7 "mismo resto al dividir por 3" 7.

Efectivamente la propiedad se cumple, ya que es lógico que cualquier número dé el mismo resto que él mismo al dividirlo por 3. Lo hacemos extensivo a cualquier elemento de Z y observamos que no hay ninguna excepción.

2.° Simétrica: $x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$

7 "mismo resto al dividir por 3" 10 $\longrightarrow$ 10 "mismo resto al dividir por 3" 7

Es seguro que también se cumple.

3.° Antisimétrica: $x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x$

Como se cumple la simétrica, no se cumple la antisimétrica.

4.° Transitiva: $\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow x\ R\ z$

$\left.\begin{matrix} 7 \text{ "mismo resto al dividir por 3" } 10 \\ 10 \text{ "mismo resto al dividir por 3" } 13 \end{matrix}\right\} \longrightarrow$ 7 "mismo resto al dividir por 3" 13

Se cumple la propiedad.

Como se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, se trata de una relación de equivalencia.

Para localizar las clases de equivalencia deberemos pensar que si dividimos por 3 todos los números de Z, únicamente es posible obtener los restos 0, 1, 2, ya que si el resto fuese 3 o mayor, podríamos seguir dividiendo.

Pues bien, una clase de equivalencia serán todos los números de Z, que al dividirlos por 3 den de resto 0, otra todos los que den de resto 1 y la otra todos los que den de resto 2.

Resto 0	Resto 1	Resto 2
0 ± 3 ± 6	± 1 ± 4 ± 7	± 2 ± 5 ± 8
$\subset (0) = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$	$\subset (1) = \{\pm 1, \pm 4, \pm 7, \ldots\}$	$\subset (2) = \{\pm 2, \pm 5, \pm 8 \ldots\}$

LA HERENCIA DE LAS OVEJAS

Un pastor muere dejando en herencia 17 ovejas a repartir entre sus tres hijos. Al mayor, la mitad, al segundo la tercera parte y al menor la novena parte.

La condición que les impuso para repartir esta herencia era que la tenían que repartir así y sin matar a ninguna de sus ovejas. El padre era versado en las ciencias de las matemáticas y vivió amargado, ya que ninguno de sus hijos quiso dedicarse al estudio.

¿Cómo se haría el reparto?

Como los tres hermanos no encontraron solución al problema recurrieron al anciano sabio del lugar.

Este vio en seguida la broma que les quiso gastar el padre. El anciano les prestó una oveja, de tal manera que así ya eran 18 las ovejas a repartir. Al mayor le correspondieron 9 (la mitad de 18); al mediano 6 (la tercera parte de 18); y al tercero 2 (la novena parte de 18).

$$9 + 6 + 2 = 17$$

Sobra una oveja, que era precisamente la del maestro.

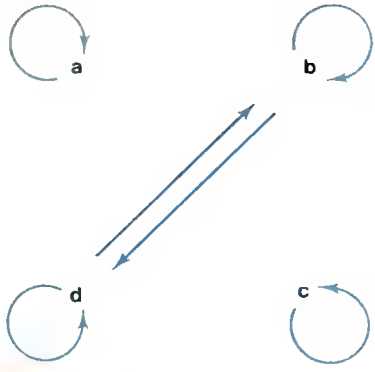
El conjunto cociente Z/R es el formado por todas las clases de equivalencia:

$$Z/R = \{[0, \pm3, \pm6, ...] [\pm1, \pm4, \pm7, ...] [\pm2, \pm5, \pm8, ...]\} =$$
$$= [\subset (0), \subset (1), \subset (2)].$$

Obsérvese que Z y Z/R son el mismo conjunto, lo que ocurre es que Z/R le hemos clasificado en clases de equivalencia. Además véase que Z/R es una partición de Z.

Ej.: En el conjunto A = [a, b, c, d] se define la relación binaria R : [(a, a) (b, b) (c, c) (d, b) (d, d) (b, d).

Como R está dada por pares, dibujaremos el diagrama de flechas para comprobar las propiedades:



1.º Reflexiva: $x\ R\ y \longrightarrow x\ R\ x$

Efectivamente se cumple, todos los elementos de A están relacionados consigo mismo por tener un bucle cada uno de ellos en el diagrama.

2.º Simétrica: $x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$

Se cumple, ya que donde existe una flecha que va, está también la que vuelve.

3.º Antisimétrica: $x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x$

No se cumple por cumplirse la simétrica.

4.º Transitiva: $\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow x\ R\ z$

Con cada elemento se cumple: $\left.\begin{matrix} a\ R\ a \\ a\ R\ a \end{matrix}\right\} \longrightarrow a\ R\ a$

La otra posibilidad es planteando las premisas: $\left.\begin{matrix} b\,R\,d \\ d\,R\,b \end{matrix}\right\} \longrightarrow b\,R\,b$ luego se cumple la propiedad.

Como se cumplen las propiedades Reflexiva, Simétrica y Transitiva, es una relación de equivalencia.

Cada una de las clases de equivalencia son los elementos que están relacionados entre sí, según el criterio R. Estas son:

$$\subset (a) = [a] \ ; \subset (b) = [b, d] \ ; \subset (c) = [c]$$

El problema de la aparición de los primaros seres vivos sobre la Tierra, ha sido objeto de grandes estudios y de teorías muy curiosas.

En cada época, con arreglo a los conocimientos científicos que poseían, varios personajes dieron su opinión. En la Grecia clásica, Aristóteles formuló la teoría de la Generación Espontánea: según él, el barro, la carne, el estiércol, originaban por su descomposición natural el nacimiento de gusanos, avispas y abejas. Las moscas, mosquitos, polillas y pulgas, aparecen en el fango da los ríos, en la madera putrefacta, etc. Las aves y otros animales se originaban en algunos árbolas.

Y el conjunto cociente A/R es:

$$A/R = \{\{a\}\ \{b, d\}\ \{c\}\} = \{\subset (a), \subset (b), \subset (c)\}$$

5.—Relaciones de Orden

Son aquellas relaciones binarias que cumplen las propiedades **Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva.**

Las relaciones de orden se clasifican en dos grandes grupos:

1.º Relaciones de orden total. Son aquellas en las que queda declarado que un elemento es anterior a otro, o bien cuando se verifica alguna de las premisas xRy ó yRx, para cualquier par de elementos del conjunto.

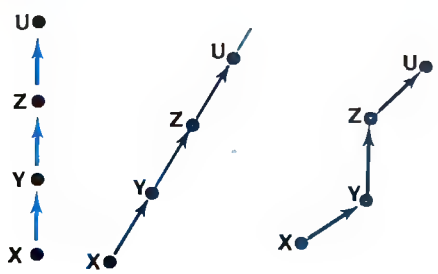
2.º Relaciones de orden parcial. Son aquellas en las que no queda declarado que un elemento sea anterior a otro, o bien cuando no se verifica ninguna de las premisas xRy ó yRx para algún par de elementos del conjunto.

NOTA.—Hay que hacer notar que las premisas xRy ó yRx no tienen nada que ver con las propiedades de las relaciones binarias, en cuanto al planteamiento que se exija de ellas. (Pueden ser ciertas o falsas.)

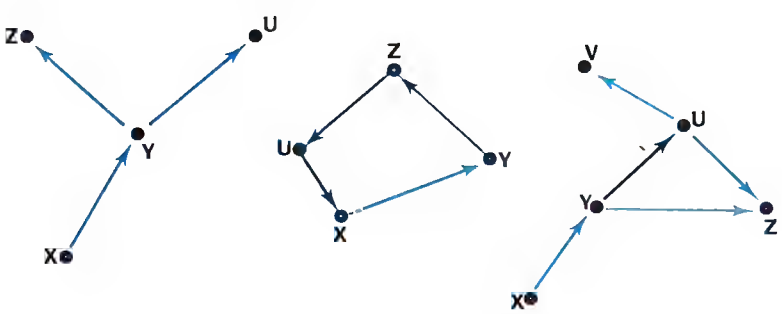
También es conveniente tener en cuenta que en un mismo conjunto A, una relación binaria puede producir una relación de orden total y otra relación binaria definida en el mismo conjunto A, puede producir una relación de orden parcial.

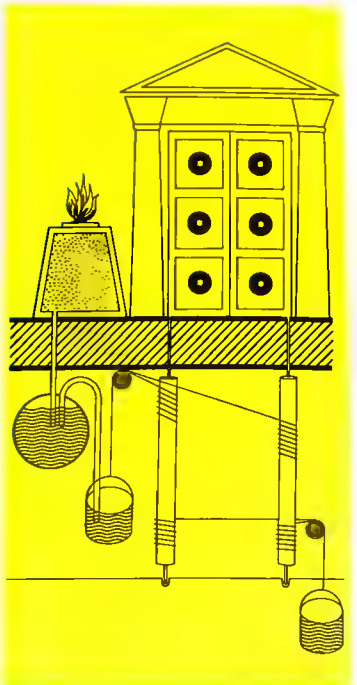
3.º Gráficos de las relaciones de orden. Diagramas de Hasse

Una relación de orden total presenta generalmente unos diagramas de tipo lineal.



Una relación de orden parcial presenta generalmente unos diagramas de tipo ramificado.



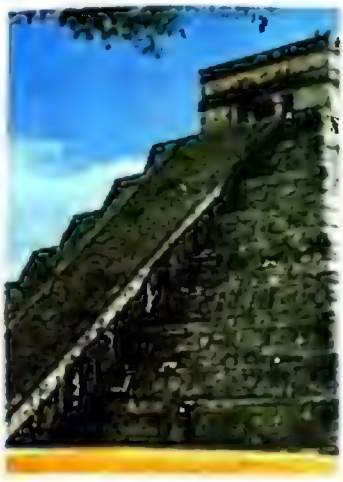


En Grecia, y hace 2.000 años, Herón, célebre matemático y estudioso, construyó una puerta para un templo que se abría al encender el fuego del altar y se cerraba al apagarse.

Al encender el fuego, el aire contenido en la base del altar se calienta, aumentando de volumen; el agua del depósito esférico se comprime descargando en el recipiente, que aumenta de peso; al pesar más, baja y tira de las cuerdas enroscadas en los palos que se mueven sobre sí mismos, situados en la prolongación del eje de las bisagras, abriendo las puertas.

Al apagarse el fuego el aire se enfría, creando una depresión en el depósito esférico, que aspira agua del cubo, aligerando éste su peso; el contrapeso de la derecha obliga a los palos a dar vueltas en sentido contrario, cerrando la puerta.

Herón nos ha dejado varios libros en los que describe aparatos de un ingenio extraordinario.



El centro en que floreció la cultura Olmeca con más intensidad, fue una isla de espesa selva tropical en el Estado de Tabasco, llamada La Venta. Allí los Olmecas construyeron plataformas para templos, templos en forma de pirámide, altares, plazas grandiosas. Esta ciudad alcanzó su máximo explendor cívico y cultural hacia el año 800 antes de Cristo.

Un descubrimiento realmente sorprendente realizado en La Venta son seis enormes cabezas talladas en basalto, encontradas entre la espesura de la selva; miden 3 m. de altura y pesan varios miles de kilos.

Lo que tiene atónitos a los estudiosos as que en toda la isla no existen piedras ni canteras de ninguna clase, por lo tanto el material o las figuras acabadas debieron ser transportadas por lo menos desde un centenar de kilómetros de distancia.

Ej.: En el conjunto N se define la siguiente relación binaria R: "Dos elementos de N están relacionados si uno de ellos es mayor o igual que el otro".

Es conocido que en este caso la relación R se puede exponer de la forma: $a \geqslant b$, $\forall a, b \in N$.

Vamos, pues, a comprobar las propiedades de las relaciones binarias:

1. Reflexiva: $x\ R\ y \longrightarrow x\ R\ x$

Si $a \geqslant b$ es evidente que se cumple $a \geqslant a$ ($a \geqslant b \rightarrow a \geqslant a$). Y, además, para cualquier par de elementos de N. Veámoslo con un ejemplo concreto: $3 \geqslant 2 \rightarrow 3 \geqslant 3$. Luego se cumple la reflexiva.

[redacted] $x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$

Si $a \geqslant b$ no tiene por qué ser $b \geqslant a$ ($a \geqslant b \not\rightarrow b \geqslant a$). Veámoslo con un ejemplo concreto: $5 \geqslant 4 \not\rightarrow 4 \geqslant 5$. Luego no se cumple la simétrica.

3. Antisimétrica: $x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x$

Como no se cumple la simétrica, es que se cumple la antisimétrica.

4. Transitiva: $\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow x\ R\ z$

Si $a \geqslant b$ y $b \geqslant c$ es evidente que se cumple $a \geqslant c$.

$$\left.\begin{matrix} a \geqslant b \\ b \geqslant c \end{matrix}\right\} \longrightarrow a \geqslant c$$

Veámoslo con un ejemplo concreto:

$$\left.\begin{matrix} 7 \geqslant 5 \\ 5 \geqslant 3 \end{matrix}\right\} \longrightarrow 7 \geqslant 3$$

Luego se cumple la transitiva.

A la vista del estudio de las propiedades (se cumplen la Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva), podemos decidir que estamos ante una relación de orden. El siguiente paso es clasificar el tipo de relación de orden. Para ello manejaremos las dos premisas independientes x R y ó y R x.

Y observamos que cualesquiera elementos de N que escojamos siempre se cumple una de las premisas.

Veámoslo con un ejemplo: Elegimos el 9 y el 6, 6 no es mayor o igual que 9 ($6 \not\geqslant 9$), pero al revés sí son iguales, 9 es mayor o igual que 6 ($9 \geqslant 6$). Luego extendiendo este concepto a todos los elementos de N, siempre se cumple una de las dos premisas, por tanto se trata definitivamente de una relación de orden total.

Ej.: En el conjunto N se define la relación binaria R: "Dos elementos están relacionados si uno divide al otro".

Téngase en cuenta que cuando se dice que uno divide al otro, se refiere a que la división sea exacta.

Pasamos a comprobar las propiedades (se insiste que se debe partir de premisas ciertas en las propiedades).

1.° Reflexiva: $x\ R\ y \longrightarrow x\ R\ x$

Elegimos dos elementos de N que estén relacionados por R.

2 "divide a" 4 $\longrightarrow$ 2 "divide a" 2

Es cierto que se cumple la reflexiva, cualquier número divide a él mismo.

2.° Simétrica: $x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$

2 "divide a" 4 $\not\longrightarrow$ 4 "divide a" 2

No se cumple la simétrica.

3.° Antisimétrica: $x\ R\ y \not\longrightarrow y\ R\ x$

No se cumple la simétrica, luego se cumple la antisimétrica.

4. Transitiva: $\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{matrix}\right\} \longrightarrow x\ R\ z$

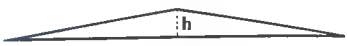
$$\left.\begin{matrix} 2 \text{ "divide a" } 4 \\ 4 \text{ "divide a" } 8 \end{matrix}\right\} \longrightarrow 2 \text{ "divide a" } 8$$

Se cumple la transitiva.

A la vista de las propiedades (se cumple la Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva) se trata de una relación de orden.

Pasamos a continuación a clasificar la relación de orden.

Si un puente metálico tiene mil metros de longitud y no tuviera espacios previstos para su dilatación, el puente se levantaría formando un triángulo, en que la base sería el puente antes de esta dilatación y la altura sería h, esto es:



Para hallar esta altura, se forman dos triángulos rectángulos.

hipotenusa: 500 m cateto

$$\frac{1.000,2}{2} = 500,1 \text{ m.}$$

$$h = \sqrt{(500,1)^2 - (500)^2} =$$
$$= \sqrt{250.100 - 250.000} =$$
$$= \sqrt{100} = 10 \text{ m.}$$

Este problema se ha simplificado para su mejor comprensión. Los ingenieros de caminos hacen sus cálculos con más exactitud, ya que al dilatar los lados, no lo hacen en línea recta sino en líneas curvadas.

Para ello estudiaremos las premisas independientes xRy ó yRx. (Insistimos que en estas premisas no se debe dar el criterio de ciertas.)

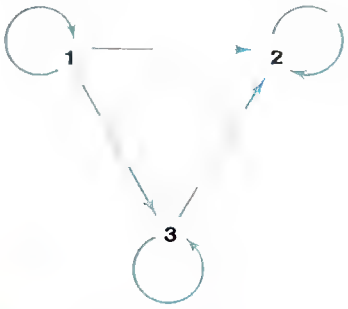
Si elegimos dos elementos, por ejemplo el 7 y 3, vemos que ninguna de las premisas es cierta: 7 "no divide a" 3, 3 "no divide a" 7.

Luego se trata de una relación de orden parcial.

Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3} se define la relación binaria

$$R : \{(1, 1)\ (1, 2)\ (2, 2)\ (3, 2)\ (1, 3)\ (3, 3)\}$$

Dibujamos el diagrama de flechas y comprobamos las propiedades:



1.º **Reflexiva:** xRy ⟶ xRx. Sí se cumple porque cada elementos posee un bucle.

Para aprender matemáticas, para estudiar cualquier ciencia. necesitamos un lenguaje común que nos permita comprendernos.

El lenguaje se compone de sonidos que se dan a unas letras vocales y consonantes que combinándolas entre sí forman palabras y éstas frases.

Los números, expresan cantidades y con ellos se pueden realizar toda clase de operaciones.

Toda esta base para el posterior desarrollo de la inteligencia del hombre tiene que aprenderlo. Los niños nacen sin saber expresarse y hasta el segundo año, poco más o menos, no pueden hacerse entender; desgraciadamente no hemos podido ponernos de acuerdo y existen multitud de idiomas que de hecho separan a los hombres y limitan sus posibilidades de entendimiento.

Las principales lenguas que hoy día se usan son:

	Personas
Chino Mandarín	700.000.000
Inglés	400.000.000
Español	300.000.000
Ruso	220.000.000
Hindú	200.000.000
Alemán	120.000.000
Arabe	117.000.000
Japonés	108.000.000
Francés	85.000.000
Italiano	60.000.000

2.º Simétrica: xRy ⟶ yRx. No se cumple porque existen casos como el (1, 3) o el (3, 2), en donde no existe flecha de vuelta.

3.º Antisimétrica: xRy ⟶̸ yRx. Sí se cumple por no cumplirse la simétrica y tener todos los elementos que están relacionados una flecha de ida o de vuelta.

4.º Transitiva: $\left.\begin{matrix} xRy \\ yRz \end{matrix}\right\} \longrightarrow xRz$. Planteamos los casos posibles:

$$\left.\begin{matrix} 1R1 \\ 1R1 \end{matrix}\right\} \longrightarrow 1R1 \qquad \left.\begin{matrix} 1R3 \\ 3R2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow 1R2$$

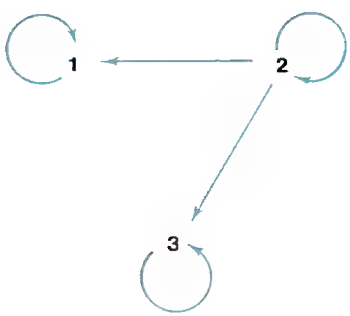
Sí se cumple, luego es una relación de orden por cumplirse las propiedades **Reflexiva, Antisimétrica y Transitiva.**

Vamos pues a averiguar de qué tipo de orden es. Observamos que siempre se cumple una de las premisas xRy ó yRx con dos elementos cualquiera, luego se trata de una relación de orden total.

Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3}, se define la relación binaria

$$R : \{(1, 1)\ (2, 1)\ (2, 2)\ (2, 3)\ (3, 3)\}$$

Dibujamos el diagrama de flechas y comprobamos las propiedades.



1.º	Reflexiva:	xRy ⟶ xRx	Sí se cumple.
2.º	Simétrica:	xRy ⟶ yRx	No se cumple.
3.º	Antisimétrica:	xRy ⟶̸ yRx	Sí se cumple.
4.º	Transitiva:	$\left.\begin{matrix} xRy \\ yRz \end{matrix}\right\} \longrightarrow xRz$	Sí se cumple, aunque únicamente sea con cada elemento.

Luego es una relación de orden y además de orden parcial, porque existe un caso en el que no se cumple ninguna de las premisas xRy ó yRx que es el (1, 3) o el (3, 1).

4.–ELEMENTOS NOTABLES DE UNA PARTE DE UN CONJUNTO ORDENADO

Imaginemos un conjunto ordenado A, total o parcial, como el que se describe en la figura, donde vamos a considerar y estudiar en parte de el B, de tal forma que B ⊂ A.

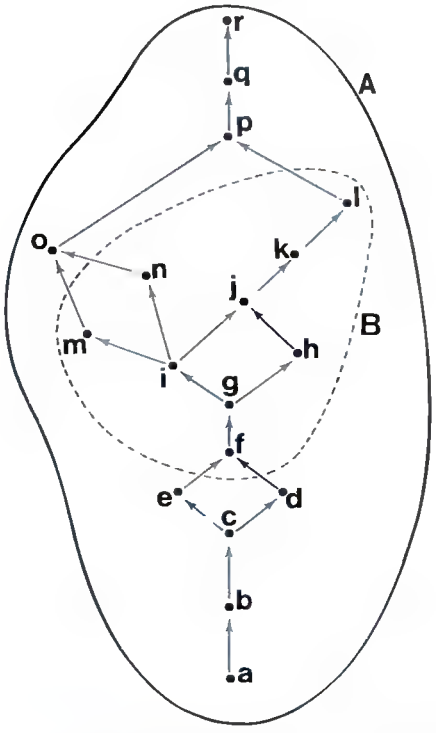
2	9	4
7	5	3
6	1	8

Para demostrar su habilidad en el uso de los números, y sus propiedades aditivas, le pedimos que en un casillero de nueve espacios coloque los números del uno al nueve, uno en cada casilla, sin repetir ninguno de ellos de forma tal que la suma de todas las columnas en cualquier posición, horizontal, vertical o diagonales mayores, sume siempre quince.

Le adjuntamos una solución. Como existen varias posibilidades, puede usted buscar alguna más.

La Edad Media aportó a la cultura tres inventos muy notables: la pólvora, la brújula y la imprenta.

Se supone que la brújula ya era conocida por los chinos desde una antigüedad muy remota, pero debido al aislamiento en que vivió aquel pueblo no llegó hasta nosotros. Un diácono de Amalfi, llamado Flavio Gioja, la empleó por primera vez para fijar la ruta de un barco, y gracias a esta aplicación, que se popularizó rápidamente, fua posible aventurarsa por los grandes océanos. Probablemente fue la brújula el instrumento qua hizo posible la raalización de los grandes viajes, primero a la zona africana por los marinos portugueses y más tarde el que Colón se dacidiera a emprender su viaje a través del Atlántico en busca del camino más corto para traer las especies de las Indias.



Pasaremos a estudiar y definir los elementos notables de B. (Se acompaña con cada concepto un ejemplo referido al gráfico.)

1.º **MINIMAL.** Es aquel elemento de B que no tiene ningún otro elemento de B anterior a él. A veces pueden existir varias minimales.

Ej.: f.

2.º **MAXIMAL.** Es aquel elemento de B que no tiene ningún otro elemento de B posterior a él. A veces pueden existir varios maximales.

Ejemplo: m, n, l.

3.º **PRIMER ELEMENTO, ELEMENTO MÍNIMO, ÍNFIMO O NULO.** Cuando existe minimal y éste es único.

Ej.: f.

4.º **ÚLTIMO ELEMENTO, ELEMENTO MÁXIMO, SUPREMO O UNIVERSAL.** Cuando existe maximal y éste es único.

Ej.: En la figura descrita no existe último elemento.

5.º **ELEMENTOS ANTERIORES O MENORES.** Son todos los elementos de A, si existen, que sean anteriores a todos los de B, incluido el primer elemento de B, si existe.

Ej.: a, b, c, d, e, f.

6.º **ELEMENTOS POSTERIORES O MAYORES.** Son todos los elementos de A, si existen, que sean posteriores a todos los de B, incluido el último elemento de B, si existe.

Ej.: o, p, q, r.

7.º [redacted] Es el más posterior de los minorantes, si existe.

Ej.: f.

8.º [redacted] COTA SUPERIOR. Es el más anterior de los mayorantes, si existe.

Ej.: o.

9.º [redacted] ACOTADO INFE[redacted] Es aquel que posee minorantes.

10.º [redacted] Es aquel que posee mayorantes.

11.º [redacted] Es aquel que está acotado en los dos sentidos (superiormente e inferiormente).

5.–PARTES NOTABLES DE UN CONJUNTO ORDENADO

En un conjunto A ordenado, cabe destacar las siguientes partes:

1.º [redacted]

Es toda parte de A, totalmente ordenada.

2.º [redacted] a y b.

Es el conjunto formado por todos los elementos posteriores al a y anteriores al b, incluidos a y b.

Se simboliza por:

$$[a, b] = \{ \forall x \in A, a \leqslant x \leqslant b\}$$

Al conjunto $\{a, b\}$ formado por los extremos del intervalo $[a, b]$ se le llama **borde del segmento.**

3.º [redacted] a y b.

Es el conjunto formado por los elementos posteriores al a y anteriores al b. Se simboliza por: $]a, b[= (a, b) = \{\forall x \in A, a<x<b\}$

En este caso se producen las siguientes consecuencias:

4.º [redacted]

$$]a, b] = (a, b] = \{\forall x \in A, a<x \leqslant b\}$$

5.º [redacted]

$$[a, b[= [a, b) = \{\forall x \in A, a \leqslant x<b\}$$

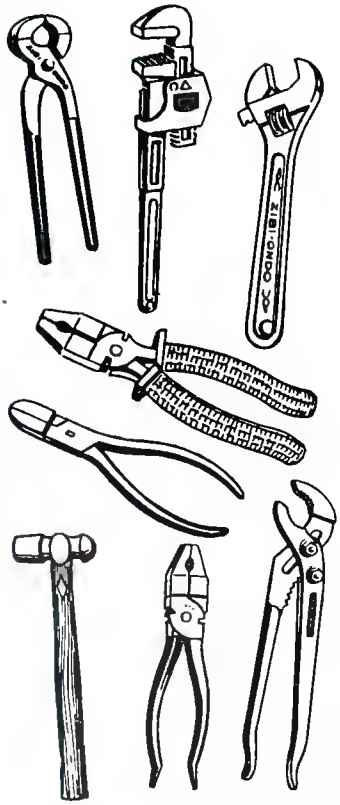
Al conjunto $\{a, b\}$, formado por los extremos del intervalo abierto (a, b) se le llama **frontera del intervalo.**

Ej.: En el conjunto ordenado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cuyo diagrama de orden es el de la figura adjunta:

En un lejano país árabe un rey tenía 10 súbditos. Cada uno de estos súbditos le tenía que pagar al rey 10 monedas de 10 gramos. Uno de los súbditos hace monedas de 9 gramos y por lo tanto le paga con 10 monedas de 9 gramos. El rey quiere descubrir quién es el autor del fraude, pero dispone de una báscula que sólo puede ser utilizada una vez. ¿Cómo se puede descubrir al defraudador y además de una sola pesada?

SOLUCION

En el mismo orden en que fue recibiendo el pago de las diez monedas las fue dejando en un montón. Se juntó entonces con 10 montones de 10 monedas cada uno. Bien, cogió una moneda del primer montón, dos del segundo, tres del tercero..., y así hasta el décimo que tomará las diez. Así se juntó con 55 monedas, las cuales en condiciones normales pesarían 550 gramos. Tantos gramos como le falten ése será el orden del ladrón, o sea, si le faltan 4 gramos (peso de 546 gr.) el ladrón será el 4.º, si le faltan 6 gramos (544 gr.) el ladrón será el 6.º, y así sucesivamente hasta el máximo de falta que será el de 10 gr. (540 gr.), y entonces el ladrón será el 10.º.

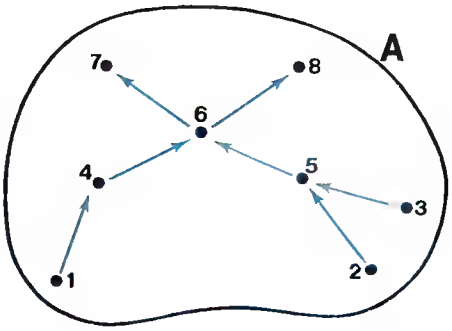


Las herramientas nacieron en la más remota antigüedad. Fueron en un principio utensilios que mejoraban la acción de la mano y constituían una prolongación de la misma. Las primeras herramientas fueron piedras y palos. Con el descubrimiento de los metales se fueron creando instrumentos apropiados para cada cometido.

Al ir el hombre especializándose en diferentes actividades, fue creando las herramientas apropiadas: en tumbas egipcias se encontraron instrumentos médicos que se usaban en la vida normal y con los que se practicaban ya intervenciones en el cuerpo humano.

Con el tiempo estas herramientas han evolucionado y hoy día la gran industria emplea útiles muy sofisticados y procesos electrónicos que sirven para realizar los trabajos más duros.

En cualquier actividad laboral, comercial o profesional se cuenta con herramientas grandes o pequeñas, según el caso, pero siempre apropiadas a cada función específica.



Podemos distinguir a título orientativo los siguientes conceptos:

$[1, 2] = \varnothing$

$[2, 7] = \{2, 5, 6, 7\}$ $\qquad$ $]2, 7] = \{5, 6, 7\}$

$[2, 7[= \{2, 5, 6\}$ $\qquad$ $]2, 7[= \{5, 6\}$

Borde del segmento $[2, 7] = \{2, 7\}$.

Frontera del intervalo $(2, 7) = \{2, 7\}$.

6.º CONJUNTO CONVEXO.

Cualquier subconjunto de B de cualquier conjunto ordenado A se le llama convexo cuando $\forall a, b \in B$ se verifica que el conjunto que define el intervalo cerrado [a, b] es subconjunto de B ($[a, b] \subset B$).

Se denomina **cierre convexo** de un subconjunto B de cualquier conjunto ordenado A, al menor conjunto convexo que contiene a B. Se representa al cierre convexo como $\hat{B}$ de tal forma que siempre ocurrira que $B \subset \hat{B}$.

7.º CONJUNTOS BIEN ORDENADOS

Cualquier conjunto A donde se haya definido una relación de orden R, se dice que está bien ordenado por R, cuando todo subconjunto no vacío de A posee primer elemento.

En todos los conjuntos bien ordenados deberemos de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

– En todo conjunto bien ordenado, R es de orden total.

– En todo conjunto bien ordenado, todo elemento tiene su siguiente.

Ej.: El conjunto de los números naturales N con la relación binaria: R : "$a \leqslant b \ \forall a, b \in N$", es un conjunto bien ordenado, pues se cumplen las condiciones:

1.º Cualquier subconjunto no vacío de N tiene primer elemento.

2.º La relación R es de orden total (este ejemplo ya está hecho anteriormente).

3.º Cualquier elemento de N tiene su siguiente.

TEMA 6

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

INDICE

1.—INTRODUCCIONES.
2.—LEYES DE COMPOSICION.
   A.—Leyes de composición interna. Operaciones internas.
   B.—Leyes de composición externa. Operaciones externas.
3.—CONCEPTO DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA.
4.—PROPIEDADES DE LAS LEYES DE COMPOSICION INTERNA.
   A.—Propiedad asociativa.
   B.—Propiedad conmutativa.
   C.—Propiedad del elemento neutro.
   D.—Propiedad del elemento simétrico.
   E.—Normas para comprobar las propiedades.
5.—GRUPOS
6.—CONSIDERACIONES EN LOS GRUPOS.
7.—PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.
8.—ANILLOS.
9.—CUERPOS.
10.—APLICACIONES ENTRE ESTRUCTURAS.
   A.—Homomorfismos.
   B.—Tipos de homomorfismos.
11.—RETICULOS. ALGEBRA DE BOOLE.
   A.—Concepto de reticulo.
   B.—Tipos de reticulos.

TEMA 6

ADIVINAR UN NUMERO

Pide a un amigo que piense un número, que le añada, por ejemplo, 8, que le reste 3, que le vuelva a sumar 5, otra vez que le sume 2 y, a continuación, que le reste el número que ha pensado.

Estas operaciones seran, lógicamente, las que tú quieras, siendo las cantidades anteriores un simple ejemplo. Pues bien, siempre adivinarás el resultado, haciendo mentalmente las operaciones que le sugieres, ya que al restar el número que pensó quedan solamente las operaciones realizadas por los dos.

FACIL MULTIPLICACION

Para multiplicar el número 142.857 por 3 no es necesario más que trasladar el 1 al final del número.

$$142.857 \times 3 = 428.571$$

DIVISION CURIOSA

El número 370.370.370 dividido por 3 da de cociente una cifra correlativa.

```
370.370.370 |3
07          |123456789
010
 013
  017
   020
    023
     027
      030
       03
```

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1.–INTRODUCCION

Hasta este tema hemos estado tratando a los conjuntos como entes constituidos por unos elementos determinados.

Sin embargo si a estos conjuntos con sus elementos les dotásemos de algún tipo de operación o regla, veríamos que dichos elementos comienzan a constituir entre ellos mismos algún tipo de organización o estructura.

Pensemos que cuando nosotros estamos participando en algún juego de cartas, por ejemplo, estamos en posesión de unos elementos que son las cartas en sí. Cuando a estas cartas las dotamos de unas reglas, estamos formalizando un tipo particular de organización o estructura entre ellos, que en definitiva es el juego en sí.

Ahora bien, para precisar cualquier tipo de operación, es necesario conocer con anterioridad cual es la ley que va a permitir desarrollar tal operación.

De esta forma van a ser estas leyes las que van a dar lugar a clasificar posteriormente las operaciones y las que nos van a detectar las diferencias entre ellas.

2.–LEYES DE COMPOSICION

Reciben este nombre las reglas que permiten obtener un resultado a partir de unos datos, mediante una operación perfectamente definida.

Estas leyes se suelen representar en su forma más general con la simbología: $*$, o, $\perp$, $\top$, $\wedge$, ... y se leen

Ej.: a∗b y leeremos "a compuesto con b" o "a operado con b".

Naturalmente cuando en un problema utilicemos dos leyes distintas, también utilizaremos dos símbolos distintos, con objeto de distinguir a las leyes.

NOTA.—Más particularmente en la Aritmética, se utilizan como símbolos para indicar leyes de composicion a los ya conocidos: +, −, ×, ·, :, ...

Así pues, las leyes de composición se clasifican en dos grandes tipos:

A.—Leyes de composicion interna. Operaciones internas.

Dado un conjunto A, se llama ley de composición interna a cualquier aplicación de A × A en A, es decir, cuando cada par de A × A posee una sola imagen en A (obsérvese que únicamente se utiliza un solo conjunto).

Una ley de composición interna puede estar bien definida o mal definida.

Se dice que está **bien definida** cuando todos los pares de A × A tienen una imagen A. En este caso también se dice que la ley de composición interna es **cerrada, estable** o tiene la propiedad de **clausura.**

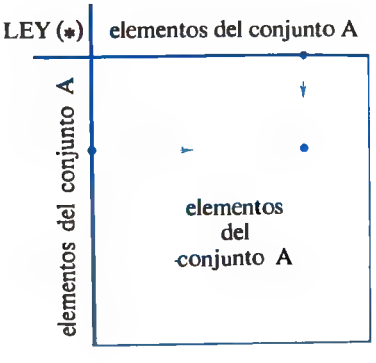
Se dice que está **mal definida** cuando no todos los pares de A × A tienen una imagen en A. En este caso se dice que la ley de composición interna es **abierta, inestable** o no tiene la propiedad de **clausura.**

Las leyes de composición interna se pueden manifestar de dos formas:

1.º **Por extensión.**

Mediante un criterio cualquiera definido en un conjunto A, que permita asociar elementos de A × A con elementos de A.

Esta aplicación se podrá exponer en un diagrama de flechas como hacíamos en el tema de correspondencias, o también mediante un sistema particular utilizado para las leyes de composición interna, consistente en una tabla de doble entrada.



El hombre de las cavernas y aun el de etapas posteriores no tenía necesidad de conocer la hora; para él lo más apropiado resultaba esperar el nacimiento del día; cuando habia claridad suficiente salía de su refugio y se lanzaba a recoger frutos o cazaba algún animal. Al caer la tarde y hacerse la oscuridad volvía a esconderse en su primitiva vivienda y allí pasaba la noche.

Con el paso del tiempo observó que la sombra proyectada por algún elemento cercano a su guarida, una roca o un árbol, lo hacia de una forma regular y marcó algunos puntos que le daban referencias más concretas, como por ejemplo el mediodía.

El empleo de un palo clavado verticalmente en el suelo se debe a los Caldeos y fue el precursor del reloj de sol o cuadrante solar, en el que una varilla llamada "estilo" proyecta una sombra sobre una pared donde primeramente se han calculado las marcas que corresponden a las diferentes horas siguiendo el movimiento del sol. La hora así obtenida sólo es aproximada, pero valió perfectamente para su época.

El reloj de sol basa sus indicaciones en la variable posición de éste con respecto a la tierra y en consecuencia en la variación de la sombra proyectada por una varilla sobre un muro o pared.

En líneas generales, se puede decir que hoy día cualquier persona un poco mañosa puede construirse un sencillo reloj de sol, que le sirva de motivo decorativo.

Es indispensable disponer de un muro de cara al mediodía, de una varilla de hierro maciza y cilíndrica, de 15 ó 20 milímetros de diámetro, de 70 a 80 centímetros de longitud, un extremo cortado y redondeado ligeramente, y el otro aplastado y abierto en dos para que no se mueva dentro del muro (un trozo de varilla de la usada por los ferrallistas para hacer las armaduras, que van dentro de las columnas de hormigón, puede valer).

La varilla la introducimos (por su parte aplastada) en un hueco hecho en el muro, que rellenaremos con cemento; es condición indispensable, ponerla paralela al eje N. S. de la tierra, con una brújula.

Para conseguir la inclinación necesaria cortaremos un triángulo de madera, con dos lados a 45 grados. Este triángulo se sujetará al muro, con cuatro pegotes de yeso negro, que luego se quitarán. Una vez fraguado el cemento, quitar el soporte de madera y comprobar que la varilla proyecta su sombra exactamente en línea vertical, justo al mediodía. ¡Atención, el mediodía solar, y la hora oficial, tienen diferencia según la época!

Para el pintado del cuadrante del reloj, en principio nos serviremos, de unas tizas, de un buen reloj y de mucha paciencia. Observaremos dónde proyecta la sombra en cada hora, y allí marcaremos una línea con nuestra tiza. En varios días podemos tener marcado y comprobado todo el cuadrante.

Este trabajo es muy apropiado para realizar en el verano, y podemos marcar a nuestro gusto la hora astronómica o la hora oficial.

La configuración de estas tablas es la siguiente:

En el ángulo superior izquierda se expone la ley u operación que da lugar al concepto de ley de composición interna:

$$(A \times A \xrightarrow{*} A)$$

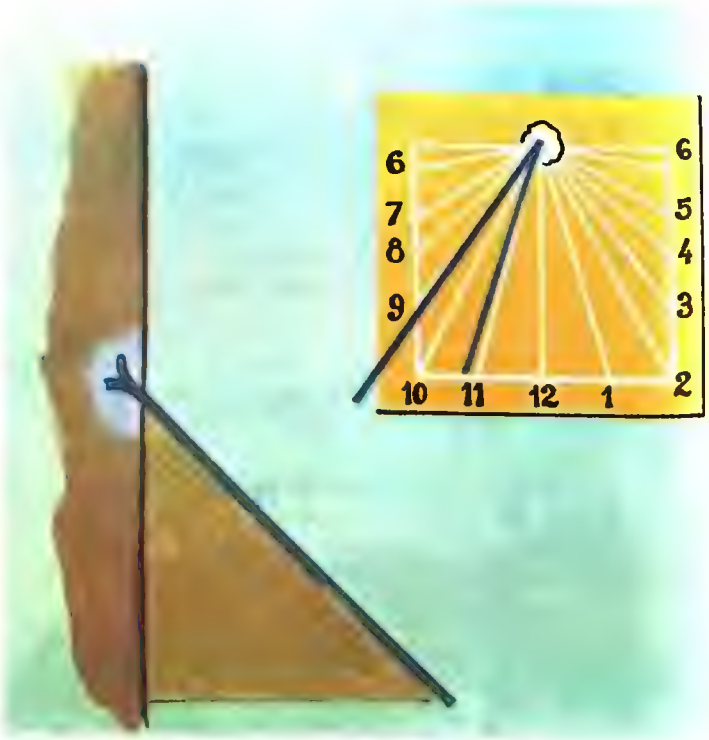
En la fila muestra y en la columna muestra, deberán estar situados los elementos del conjunto A con la misma ordenación (en realidad estas dos líneas están formalizando el conjunto $A \times A$).

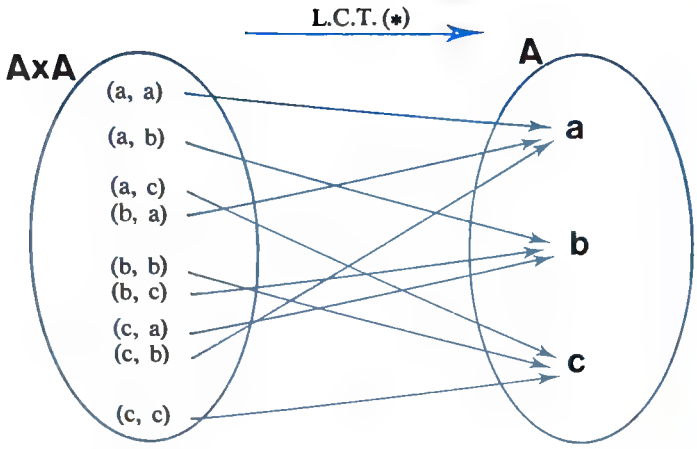
Dentro de la tabla únicamente existirán elementos del conjunto A (en realidad el relleno de la tabla formaliza al conjunto A).

De tal forma que para ver cuál es la aplicación y qué elemento le corresponde a cada par de $A \times A$ en el conjunto A, entraremos siempre por la fila y por la columna muestra, siendo la intersección de las dos líneas el elemento correspondiente.

Si todos los huecos del interior de la tabla están rellenos, diremos que la ley de composición interna está bien definida. Al contrario diremos que está mal definida.

Ej.: Imaginemos que en el conjunto $A = \{a, b, c\}$ hemos definido la siguiente aplicación con categoría de ley de composición interna, según el diagrama de flechas siguiente:





Obsérvese cómo en el conjunto de partida está el conjunto A × A y en el de llegada el conjunto A, concepto característico de que estamos realizando una ley de composición interna con una operación * que en este momento desconocemos y que además no nos interesa conocer, pero que en definitiva es la que ha permitido la aplicación de A × A en A.

Vamos pues a intentar transcribir esta aplicación a una tabla de doble entrada.

*	a	b	c
a	a	a	b
b	b	c	a
c	c	b	c

Obsérvese, como por ejemplo al par (c, b) le corresponde el elemento a en la tabla, como en el gráfico de flechas y así sucesivamente con todos. (Se entra primero por la fila y luego por la columna). Obsérvese cómo esta ley está bien definida, ya que cada par de A × A posee una imagen en A.

2.º Por comprensión.

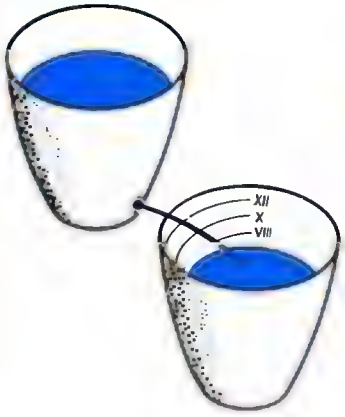
Es cuando la ley se expresa mediante una expresión o fórmula matemática que permita cubrir todas las posibilidades que indique la operación.

Ej.: En el conjunto N se define la siguiente operación * con categoría de ley de composición interna: $a * b = 2a + 3b$

$\forall a, b \in N$

Un curioso reloj de sol es el que se encontró en la excavación de una tumba egipcia: es el llamado de Tutmosis III y se le calcula una antigüedad de 3.500 años. Como puede verse en el dibujo, es una pieza portátil, compuesta de una barra metálica con unos dobleces terminados en otra barra horizontal. La persona encargada de manejarlo lo situaba de forma que quedará en línea con el sol. Unas marcas señaladas convenientemente permitían averiguar la hora. Este es, sin duda, el modelo más antiguo que se conoce fabricado por el hombre.

Se cree que este modelo estuvo muy difundido entre las clases pudientes, y sabiendo su afición a decorar con ónices, amatistas, y piedras preciosas, no sería raro que existieran verdaderas obras de arte, en plata o en oro, que, o permanecen sin descubrir, o lo que es más fácil, fueran presa de los saqueadores de tumbas que causaron tantos destrozos durante muchos siglos.



CLEPSIDRA

La clepsidra o reloj de agua intentó resolver el problema que creó el reloj de sol.

La noche tiene sus horas, igual que el día; el cielo nublado y las zonas poco soleadas imposibilitaban también la medida del tiempo.

Entonces el hombre, que siempre ha sentido deseo de medir y controlar los fenómenos que le rodean, estudió un reloj de agua. Los egipcios y los chinos lo emplearon, pero su perfeccionamiento parece que se debe a los griegos.

De un recipiente de barro situado más alto caía una gota de agua a otro recipiente inferior, unas marcas situadas en este último y calculadas con arreglo al agua caída por hora permitía saber en cada momento la hora en que se estaba. Normalmente se fabricaban con capacidad para un día y cada veinticuatro horas se cambiaba el agua del recipiente inferior al superior o se establecía un sistema de entrada libre superior y espita para desaguar en el inferior cuando fuera necesario.

Este tipo de expresiones se suelen leer de la siguiente forma: a * b (a [illegible] b), también a lo que va a izquierda del signo * se le suele llamar primero y a lo que va a la derecha del signo * se le suele llamar segundo [illegible] y así podemos sistematizar y comprender mejor el resultado de la operación a la derecha del signo = (leyendo: dos veces el primero más tres veces el segundo).

Efectivamente podemos comprobar que es una ley de composición interna en N la que nos proponen, ya que perteneciendo a y b al conjunto de los números naturales como nos dicen, si nosotros sustituimos a y b por número de N en 2a + 3b, obtenemos siempre como resultado número de N (Si a = 5 y b = 6 ⇒ 2a + 3b = 2·5 + 3·6 = 28)

Si por alguna circunstancia, introdujimos números de N para a y b en 2a + 3b y no obtuviésemos como resultado un número de N, estaríamos en condiciones de asegurar que la ley propuesta en N no es la ley de composición interna en N. (Asunto que no ocurre en este caso.)

Ej.: En el conjunto Z, se define la ley $a*b = a + \frac{b}{2}$ ¿Es ley de composición interna en Z?

No. No es ley de composición interna en Z, porque al introducir elementos de Z para a y b en $a + \frac{b}{2}$ es posible que obtengamos algún número fraccionario, que no están incluidos en Z.

B.—Leyes de composición externa. Operaciones externas

Dados los conjuntos A y B, se llama ley de composición externa a cualquier aplicación de A × A en B. Es decir, cuando cada par de A × A posee una sola imagen en B (obsérvese que, a diferencia de las leyes de composición interna donde se utiliza un solo conjunto, aquí se utilizan dos conjuntos distintos).

NOTA.—En este tema únicamente estudiaremos exhaustivamente las leyes de composición interna, ya que las leyes de composición externa dan lugar a un tipo de estructuras (como por ejemplo, espacios vectoriales) distintos a los que se pretende estudiar en este tema y que más adelante veremos.

3.—CONCEPTO DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA

En general, en un conjunto cualquiera se ha definido una estructura algebraica cuando entre sus elementos se ha definido una operación con categoría de ley de composición interna.

Posteriormente estudiaremos estructuras que a grandes rasgos podemos dividir en dos grandes partes:

[illegible] Estructuras en las que sólo es necesario una operación o ley de composición interna para que puedan manifestarse como tal. Este tipo de estructuras se manejan únicamente con las propiedades: Asociativa, Conmutativa, Elemento Neutro y Elemento Simétrico. Responden a la categoría de [illegible]

2. Estructuras en las que son necesarias dos operaciones o leyes de composiciones interna para que puedan manifestarse como tal. Este tipo de estructuras se manejan con las propiedades: Asociativa, Conmutativa, Elemento Neutro y Elemento Simétrico para cada ley. Además necesitan una nueva propiedad que recibe el nombre de Distributiva y que liga las dos leyes simultáneamente.

3. Estructuras en las que son necesarias dos operaciones o leyes de composición interna y que necesitan más operaciones de las descritas en el apartado anterior y que en su momento estudiaremos. Responden a la categoría de **Retículos o Algebra de Boole.**

4.–PROPIEDADES DE LAS LEYES DE COMPOSICION INTERNA

Todas las propiedades que se van a describir se van a exponer para un tipo de operación general (*). De todas formas téngase en cuenta que estas propiedades genéricas se pueden particularizar para operaciones como la suma (+) o el producto (·).

En definitiva, todas las propiedades de este apartado se pueden comprobar únicamente con una sola ley u operación interna.

A.–Propiedad Asociativa

Una ley de composición interna * definida en un conjunto A, posee la propiedad asociativa cuando para tres elementos cualquiera a, b, c, del conjunto A, se verifica:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

NOTA.–Cuando la ley * viene expuesta mediante una tabla de doble entrada, se suele comprobar para un caso particular, aunque se debería hacer para todas las posibilidades.

B.–Propiedad conmutativa

Una ley de composición interna * definida en un conjunto A posee la propiedad conmutativa cuando para dos elementos cualquiera a, b del conjunto A se verifica:

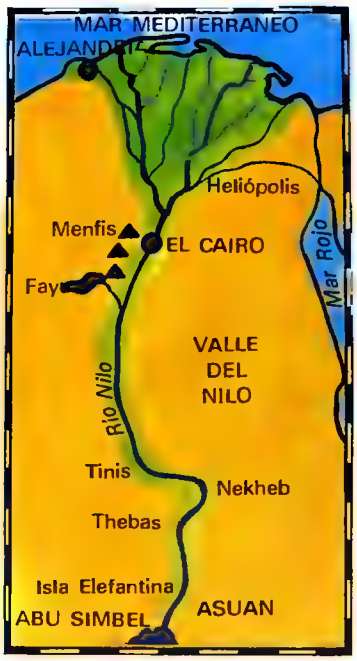
$$a * b = b * a$$

NOTA.–Cuando la ley * viene expuesta mediante una tabla de doble entrada, se traza la diagonal de la tabla, y si a un lado y a otro de ésta existe simetría geométrica o de posición en cuanto a sus elementos, es que la propiedad conmutativa se cumple.

C.–Propiedad del Elemento Neutro

Una ley de composición interna * definida en un conjunto A posee elemento neutro (e) cuando cualquier elemento a del conjunto A verifica:

$$a * e = a \text{ (elemento neutro por la derecha)}$$
$$e * a = a \text{ (elemento neutro por la izquierda)}$$



Con frecuencia el destino de un país está relacionado con alguna característica geográfica de su entorno.

La historia lo ha demostrado con numerosos ejemplos, pero ningún pueblo ha sido tan dependiente de un río como el antiguo Egipto. Puede decirse que este país era y es lo que sea el río Nilo.

Antiguamente no se extendía más allá de las riberas: comprendía el ancho del valle. El Egipto de entonces era pues una franja de unos 25 kilómetros de ancho y unos 800 kilómetros de largo. Su fertilidad es extraordinaria; la vida en este valle maravilloso, con clima cálido y sin grandes precipitaciones, lo hacía ideal para vivir y desarrollarse. No puede sorprendernos que el valle del Nilo haya sido la cuna de una de las más antiguas e importantes civilizaciones del mundo.

Los egipcios pueden estar orgullosos de su pasado. Ya en el siglo V antes de Cristo, Egipto era nombrado por Herodoto como "Un don del Nilo". La fertilidad y el bienestar dependían de los aluviones arrastrados por sus aguas y depositados en los campos ribereños cuando el río se sale de su cauce.

OTROS RELOJES

Con el deseo de medir el tiempo se crearon ingeniosos sistemas; uno de ellos fue el reloj de llama, que emplearon mucho en la época bizantina; se componía de una vela situada junto a una varilla marcada con espacios iguales que estaban calculados en función al grueso de aquélla y que una vez prendida su mecha ardía consumiendo un trozo siempre regular.

De esta forma se podía saber la hora continuamente, cuidando de que no faltase una vela siempre encendida, o bien medir un número de horas dedicadas a cualquier actividad o estudio. Más adelante se inventó el reloj de arena, especie de clepsidra o reloj de agua en el que ésta se reemplazó por arena muy fina. Este tiene el inconveniente de su limitación, impuesta por la capacidad, que solía llegar como máximo a media hora.

Hoy día este tipo de reloj de arena sólo se usa para que algunas personas midan los tres minutos de una conferencia telefónica.

Obsérvese que de lo que se trata, para que exista elemento neutro, es que cada elemento del conjunto al operarlo con el neutro deje reproducir el mismo elemento.

Para el elemento neutro debemos de hacer las siguientes consideraciones:

– El elemento neutro de una ley de composición interna debe ser absolutamente único para todos los elementos de la ley.

Cuando la operación que se define en un conjunto cualquiera es la suma (+), el elemento neutro recibe también el nombre de opuesto.

Cuando la operación que se define en un conjunto cualquiera es el producto (·), el elemento neutro recibe también el nombre de recíproco o inverso.

Ej.: En cualquier conjunto numérico (N, Z, Q, R, C), con la operación suma, el elemento neutro es siempre el cero (0), ya que cualquier elemento, al sumarlo con el cero, nos reproduce siempre el mismo elemento.

Ej.: En cualquier conjunto numérico (N, Z, Q, R, C), con la operación producto, el elemento neutro es siempre el uno (1), ya que cualquier elemento, al multiplicarlo con el uno, nos reproduce siempre el mismo elemento.

Si una ley de composición interna no posee la propiedad conmutativa, es necesario comprobar el elemento neutro por la derecha y por la izquierda para ver si coinciden los resultados y poder confirmar la validez de la operación. Cuando se cumpla la propiedad conmutativa y exista elemento neutro, existirá por la derecha y por la izquierda y en este caso diremos que existe elemento neutro simplemente.

Ej.: Bastante más adelante observaremos que el producto de matrices, si tiene elemento neutro por la derecha, puede o no puede tenerlo por la izquierda.

Si en una ley de composición interna no existe elemento neutro, tampoco existe elemento simétrico.

NOTA.—Cuando la ley $*$ viene expuesta mediante una tabla de doble entrada, para comprobar la existencia del neutro se busca una fila y una columna iguales que las muestras. Si existe la intersección es el neutro.

D.—Propiedad del Elemento Simétrico

Una ley de composición interna $*$ definida en un conjunto A posee elemento simétrico (a'), cuando cualquier elemento a del conjunto A verifica:

$$a * a' = e \text{ (Elemento Simétrico por la Derecha)}$$

$$a' * a = e \text{ (Elemento Simétrico por la Izquierda)}$$

Obsérvese que de lo que se trata para que exista elemento simétrico es que cada elemento del conjunto, al operarlo con un simétrico, debe producir el neutro.

Para el elemento simétrico, deberemos de hacer las siguientes consideraciones:

El Elemento Simétrico de una ley de composición interna debe ser único para cada elemento de la ley. (Obsérvese que el neutro debe ser único para **todos los elementos de la ley**, sin embargo el simétrico debe ser único para **cada elemento de la ley**.)

Cuando una ley $*$ admita elemento simétrico, diremos que la ley $*$ se ha **simetrizado**.

El Simétrico del simétrico de un elemento es este mismo elemento. Hecho que se conoce con el nombre de **involución**.

— Cualquier elemento a de un conjunto A al que se ha dotado con una ley $*$ se dice que es **regular**, cuando se verifica:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \text{ (Regular por la izquierda)}$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c \text{ (Regular por la derecha)}$$

Aunque esta propiedad no tiene en general interés para la clasificación de estructuras, se la incluye como referencia y para indicar que cuando todos los elementos de una ley $*$ poseen simétrico es que también son **regulares o simplificables**.

NOTA.—Cuando la ley $*$ viene expuesta mediante una tabla de doble entrada, para comprobar la existencia del simétrico se mira a ver si en todas las filas y columnas está el neutro sin repetirse. Si es así, efectivamente existe elemento simétrico.

E.—Normas para comprobar las propiedades

Se habrá observado que todas las propiedades poseen dos expresiones: una a la izquierda y otra a la derecha del signo igual.

Pues bien, para su comprobación en el caso de que la ley esté definida por comprensión, debemos de operar la parte de la izquierda y la parte de la derecha, según los criterios que nos indique la ley de composición interna en cuestión. Si las dos partes resultan idénticas, aseguraremos que la propiedad se cumple, excepto que los resultados tengan una forma que permita deducir que las partes pueden abocar a resultados particulares que no correspondan al conjunto donde se ha definido la ley; esta última instancia será determinante para invalidar la propiedad.

Para el caso de que la ley de composición esté, o se pueda definir por extensión mediante una tabla de doble entrada, ya se ha indicado en las notas al final de cada propiedad el procedimiento a seguir.

Ej.: En el conjunto N se define la ley de composición interna $*$ como:

$$a * b = a + b \qquad \forall\, a, b \in N$$

Efectivamente es una ley de composición interna bien definida, ya que si sustituimos a y b por números de N, en a + b, el resultado de esta suma es siempre otro número de N.

El rey Hieron de Siracusa encargó a su joyero la confección de una figura de oro, para ello le dio el material que consideró necesario. Al final de la obra el rey encargó a su amigo Arquímedes una investigación para ver si el joyero había sustituido parte del oro por plata.

Arquímedes demostró el fraude del joyero indicando la cantidad exacta de oro que había sido sustituida por plata. Para ello pesó cantidades de oro y plata iguales al total de la figura en el aire y sumergidas en agua. El rey quedó satisfecho. El que quedó realmente sorprendido fue el joyero.

La mayor parte de las personas tienen un modo de andar natural que es el contrario al debido. Andan sin gracia, de un modo desorganizado y sin sacar buen partido de la marcha. A los "Boy Scouts" de América, el Departamento de Médicos del Ejército, les ha enseñado un verdadero estilo de la marcha.

Marchad con el tórax hacia adelante; el tórax abombado, levanta el diafragma y contrae los músculos del estómago, hasta su relajación. El estómago debe llevarse firmemente contraído en vez de llevarlo hacia afuera. Con los dedos de los pies colocados rectos hacia adelante. Si se pisa con la punta del pie hacia afuera, se rompe la estructura del pie y el paso se hace vacilante. Desde el momento en que el pie se vuelva hacia un lado, se pierde toda la elasticidad. Compaginad el movimiento de los brazos con el de los pies y así de esta manera el esfuerzo al avanzar será menor. Al iniciar el paso, el talón es lo primero que toca el suelo; luego debe trasladarse el peso hacia adelante, de forma que el talón no haga ruido el entrar en contacto con el suelo.

$$\underbrace{a * (b * c)}_{\underbrace{a * (b + c)}_{\underbrace{a + (b + c)}_{a + b + c}}} = \underbrace{(a * b) * c}_{\underbrace{(a + b) * c}_{\underbrace{(a + b) + c}_{a + b + c}}}$$

Para la comprobación de la propiedad elegimos inicialmente la parte de la izquierda del signo igual y luego lo mismo con la parte de la derecha.

En cada una de las partes tenemos dos signos $*$, habrá que eliminar los dos según el criterio $a * b = a + b$, primeramente eliminaremos el del paréntesis y luego el otro. (Téngase en cuenta que el criterio lo manejaremos diciendo: primer compuesto conseguido es igual a primero más segundo).

Es obvio que los dos miembros dan el mismo resultado, luego la propiedad se cumple (además los resultados de los dos miembros encajan para soluciones particulares dentro del conjunto N).

Imaginemos que queremos comprobarla para un caso particular aunque siempre debe hacerse en general como ya se ha expuesto $(2, 3, 4 \in N)$.

$$\underbrace{2 * \underbrace{(3 * 4)}_{7}}_{9} = \underbrace{\underbrace{(2 * 3)}_{5} * 4}_{9}$$

Conmutativa

$$\underbrace{a * b}_{a + b} = \underbrace{b * a}_{b + a}$$

Sí se cumple, los dos miembros o partes dan el mismo resultado, y para solucionar particulares están siempre de N.

Elemento neutro

$$\underbrace{a * e = a}_{a + e = a \Rightarrow e = o}$$

Sí existe elemento neutro $(e = o)$ porque obtenemos un resultado fijo (si e dependiese de una letra, invalidaríamos la propiedad porque el neutro debe ser único) que además pertenece a N.

Elemento simétrico

$$\underbrace{a * a' = e}_{a + a' = o \Rightarrow a' = -a}$$

No existe elemento simétrico porque si $a' = -a$ para valores de N que le demos a "a" obtenemos los mismos pero negativos, que no están incluidos en el conjunto N.

5.—GRUPOS

Cuando en un conjunto A se ha definido una ley de composición interna $*$, se crean unos tipos de estructuras que reciben los nombres siguientes, según las propiedades que cumplan:

Grupoide (Clausura).

Semigrupo (Clausura, Asociativa).

Semigrupo abeliano o conmutativo (Clausura, Asociativa, Conmutativa).

Semigrupo abeliano o conmutativo con elemento neutro (Clausura, Asociativa, Conmutativa, Elemento Neutro).

Grupo (Clausura, Asociativa, Elemento Neutro, Elemento simétrico).

Grupo abeliano o conmutativo (Clausura, Asociativa, Conmutativa, Elemento Neutro, Elemento Simétrico).

Subgrupo cualquier parte o subconjunto no vacío de un grupo, que a su vez sea grupo respecto a la misma ley de composición interna, se dice que es un subgrupo de aquél.

Es decir, que para que una estructura sea subgrupo G′ de un grupo G, es necesario y suficiente que reúna los siguientes requisitos:

1.º) $G' \subset G$

2.º) $\forall\ a, b \in G' \Rightarrow a * b' \in G'$

NOTA.—Cuando las operaciones que se definen en un conjunto son la suma y la diferencia al nombre de la estructura se le suele añadir la palabra aditivo o multiplicativo respectivamente.

Ej.: En el conjunto Z se define la ley de composición $*$ de la forma: $a * b = a + b + 2ab$.

$\forall a, b \in Z$. Clasificar la estructura.

Comenzamos por comprobar las propiedades:

Cerrada Se cumple, cualesquiera elementos de Z que utilicemos obtenemos nuevos elementos de Z (a + b + 2ab).

Asociativa

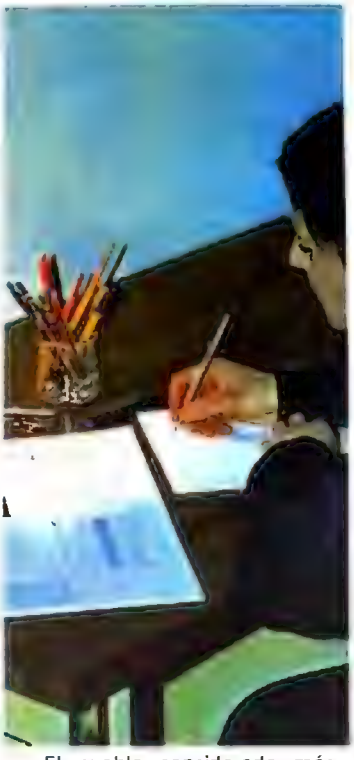
$$\underbrace{a * \underbrace{(b * c)}}_{a*(b+c+2bc)} = \underbrace{\underbrace{(a * b)} * c}_{(a+b+2ab)*c}$$

$$\underbrace{a + (b + c + 2bc) + 2a(b + c + 2bc)}_{a+b+c+2bc+2ab+2ac+4abc} \quad \underbrace{(a + b + 2ab) + c + 2(a + b + 2ab)c}_{a+b+2ab+c+2ac+2bc+4abc}$$

Sí se cumple, ya que los dos miembros son iguales y con cualquier resultado en Z (el criterio utilizado traducido a lenguaje vulgar es: primero compuesto con segundo igual a primero más segundo, más dos veces el primero por el segundo).

Conmutativa

$$\underbrace{a * b}_{a+b+2ab} = \underbrace{b * a}_{b+a+2ba}$$



El pueblo considerado más ignorante en números es el de los Nambiguara, indígenas brasileños de la región del Matto Grosso en el 8rasil. Estos desconocen totalmente cualquier sistema de numeración y viven una existencia tan primitiva que no necesitan para nada contar ni medir.

Por contra y en plan de agotar las posibilidades de un número, se han realizado cálculos para hallar 1.000.000 de decimales de la constante matemática pi (π). Fue calculada por el matemático Jean Guillond y contó con la ayuda de un moderno ordenador.

Con el resultado de su trabajo se publicó un libro que puede considerarse el más aburrido del mundo, ya que tiene 400 páginas en las que va impreso esta interminable sucesión de decimales, por otra parte de muy escasa, por no decir nula, utilidad práctica.

Este libro fue el tema de un concurso en la TV japonesa, consiguiendo memorizar y recitar 20.000 decimales. Este portento de memoria se llama Hideaki Tomoyori, y quedó campeón en dicho campeonato.

DINOSAURIOS

Reptiles prehistóricos que vivieron en nuestro planeta hace 225 millones de años y dominaron la tierra durante 100 millones de años. Luego, de forma súbita, se extinguió totalmente la especie.

El mayor del que se tiene noticia fue el Brachiosaurus, que tenía unos 27 m. de longitud y pesaba unas 50 toneladas. Con el cuello y la cabeza levantada alcanzaba la altura de una casa de 4 pisos; estos seres herbívoros comían enormes cantidades vegetales. Posteriormente aparecieron, por los cambios de costumbres, variedades carnívoras, que cazaban y mataban a los anteriores; entre éstos destacó el Tyrannosaurus, gigante feroz de 15 m. de largo, con cabeza ancha y boca grande, de poderosas mandíbulas y afilados dientes.

Al final del período cretácico todos estos dinosaurios desaparecieron. Este dramático suceso es aún hoy día un problema fascinante y no suficientemente aclarado.

Se piensa, por una parte, que se hicieron demasiado grandes y no tenían posibilidad de mantenerse, porque todo el día comiendo no cubría las necesidades vitales que un cuerpo en constante crecimiento requería.

Si se cumple.

Elemento neutro

$$\underbrace{a * e}_{} = a$$

$$a + e + 2ae = a \Rightarrow e(1 + 2a) = o \; ; e = \frac{o}{1 + 2a} \; ; e = o$$

Si posee neutro, por ser único y pertenecer a Z.

Elemento simetrico:

$$\underbrace{a * a'}_{} = e$$

$$a + a' + 2aa' = o \Rightarrow a'(1 + 2a) = -a \; ; a' = \frac{-a}{1 + 2a}$$

No existe simétrico, ya que al sustituir a por cualquier elemento de Z en $a' = \frac{-a}{1 + 2a}$ existe la posibilidad de obtener a elementos fraccionarios que no están incluidos en Z.

A la vista de las propiedades podemos decidir que el conjunto Z con la operación * (Z, *) tiene categoría de semigrupo abeliano con elemento neutro.

Ej.: En el conjunto de los números naturales, se define la ley $\perp$ como $a \perp b = 2a$, $\forall a, b \in N$. Clasificar la estructura.

Clausura: Sí es ley de composición interna.

Asociativa:

$$\underbrace{a \perp \underbrace{(b \perp c)}_{2a}}_{} = \underbrace{\underbrace{(a \perp b)}_{2a} \perp c}_{}$$

Sí se cumple, téngase en cuenta que hemos sustituido:

El signo * por $\perp$ para adaptarlo a esta situación.

El criterio en este caso está indicado por: primero compuesto con segundo, igual a 2 veces primero.

Conmutativa:

$$\underbrace{a \perp b}_{2a} = \underbrace{b \perp a}_{2b}$$

No se cumple.

Elemento neutro:

En este caso como no se cumple la conmutativa habrá que comprobar el neutro por la derecha y por la izquierda para ver si coinciden los resultados.

Por la derecha:

$$\underbrace{a * e}_{2a} = a \Rightarrow \text{No obtenemos neutro.}$$

Ya no sería necesario comprobar por la izquierda porque al no obtener por la derecha, da lo mismo que salga por la izquierda, ya que tendríamos que confrontar resultados para asegurar la operación.

De todas formas lo vamos a comprobar.

Por la izquierda:

$$\underbrace{e * a}_{2e} = a \Rightarrow e = \frac{a}{2}$$

Tampoco existiría porque el neutro depende de a y debe ser único. Definitivamente no existe elemento neutro.

Elemento simétrico al no existir neutro, tampoco existe simétrico. Así que la ley $\perp$ definida en N (N, $\perp$), es un semigrupo.

Ej.: En el conjunto Q se define la operación $*$ como $a * b = \frac{a \cdot b}{2}$; $\forall a,.b \in Q$ clasificar la estructura.

Asociativa:

$$\underbrace{a * (b * c)}_{a * \frac{bc}{2}} = \underbrace{(a * b) * c}_{\frac{ab}{2} * c}$$

$$\underbrace{\frac{a \cdot \frac{bc}{2}}{2}}_{\frac{abc}{4}} \qquad \underbrace{\frac{\frac{ab}{2} \cdot c}{2}}_{\frac{abc}{4}}$$

Sí se cumple.

Conmutativa:

$$\underbrace{a * b}_{\frac{ab}{2}} = \underbrace{b * a}_{\frac{ba}{2}}$$

Elemento Neutro:

$$\underbrace{a * e}_{\frac{ae}{2}} = a \Rightarrow e = 2$$

Sí existe elemento neutro.

Elemento simétrico:

$$\underbrace{a * a'}_{\frac{a \cdot a'}{2}} = e = 2 \Rightarrow a' = \frac{4}{a}$$

El primero que citó las siete maravillas del mundo fue Antípater de Sidón. Mencionaba en primer lugar las pirámides de Gizeh, construidas por tres faraones en la cuarta dinastía. Las otras seis maravillas tuvieron peor suerte y de ellas sólo se han conservado algunos fragmentos del templo de Diana, levantado en Efeso, del año 350 antes de Cristo, destruido por los godos en el año 262 de nuestra era. Y de la tumba del rey Mausolo, construida en Bodrum (Turquía) en el 325 antes de Cristo. Imposible encontrar huellas de los famosos jardines colgantes de Babilonia, ni de la estatua de Júpiter, de 12 m. de altura, obra del famoso escultor Fidias, realizada en mármol, oro y marfil, situada en Olimpia (Grecia).

Tampoco quedan restos del famoso "Coloso de Rodas", de 35 m. de altura, esculpido por Cares de Lindu, sobre el año 290 antes de Cristo. Por fin, tampoco ha llegado a nosotros ningún resto del faro más alto construido en Alejandría (Egipto) en el año 270 antes de Cristo.

La organización comunal fue tomando cuerpo en la Edad Media. Los Ayuntamientos, como representantes de los habitantes de una ciudad, tomaron distintos nombres. En Aragón la unión de Ayuntamientos formó las "universidades"; en Galicia los "concejos"; en el mediodía las "municipalidades". La casa donde se reunían se llamó Ayuntamiento. Con el auge que tomó el Comercio, fue necesario crear en las ciudades los llamados "Cónsules de los mercaderes"; jueces que fallaban los pleitos del comercio. Asimismo, los "cónsules de mar" solventaban los conflictos que surgían entre armadores, marineros, pasajeros. De estos tratados, el redactado en Barcelona en el siglo XIV, es reputado como el más justo de esta naturaleza.

Si existe elemento simétrico:

Así que $(Q, *)$ es un grupo abeliano.

Ej.: En el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ se define la ley $*$ dada por la siguiente tabla:

$*$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Clasificar la estructura.

Cerradura: todos los elementos de la tabla pertenecen a A.

Asociativa: Elegimos tres elementos cualesquiera de A.

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

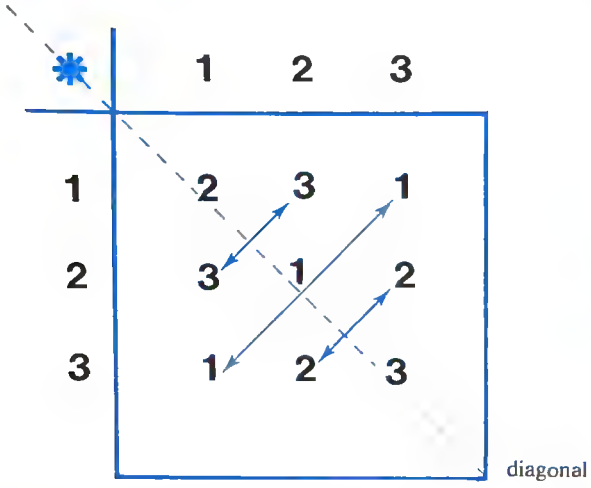
$$1 * \underbrace{(2 * 3)}_{2} = \underbrace{(1 * 2)}_{3} * 3$$

$$\underbrace{1 * 2}_{3} \qquad \underbrace{3 * 3}_{3}$$

Se cumple la propiedad. Obsérvese, como ya se dijo, que los resultados se van obteniendo a partir de la tabla (entrando por la fila muestra y luego por la columna). Por ejemplo: $2 * 3$.

$*$	1	2	3
1			
2			
3			2

Conmutativa se traza la diagonal de la tabla y si existe simetría geométrica o de posición se cumple la propiedad.



Efectivamente se cumple la propiedad.

La primera Universidad fundada en España fue la de Palencia por Alfonso VIII en 1208, aunque se considera generalmente a Salamanca como anterior a aquélla, cuando ésta se estableció en 1244. Siguieron luego la de Valencia y Sevilla en 1245, Huesca en 1354, Alcalá de Henares en 1508 y Gerona en 1440. La Universidad de Salamanca llegó a ser una de las más famosas del mundo. En el siglo XVI, contaba con 7.000 estudiantes pertenecientes a todos los países de Europa, y sus cátedras de Ciencias Exactas y de Letras fueron famosas durante mucho tiempo.

A continuación se indica el año de fundación de las primeras Universidades que se tienen noticia:

POBLACION	AÑO
El Cairo	970
Montpellier	1181
Módena	1189
Palencia	1208
Padua	1222
Nápoles	1225
París	1231
Salamanca	1244
Roma	1303
Coimbra	1309

En la época feudal el estado de la cultura era desastroso; las gentes no se ocupaban de ella ni mucho ni poco.

A causa de las continuas guerras que durante este tiempo sostuvieron los reyes y señores feudales, las tierras pasaban años sin ser trabajadas ni sembradas. Se vivía del pillaje.

Era tanta la incultura, que ni los grandes señores sabían leer ni escribir. Tan sólo los monjes, en el silencio de sus celdas, rodeados de libros y escritos de la antigüedad, seguían alimentando la llama del saber y de las ciencias.

Los primeros monasterios preservaron este legado. Copistas entendidos, con paciencia y amor a la obra perfecta, recopilaron, copiaron y comentaron las matemáticas, la geografía, la medicina y la astrología.

Su paciente labor, permitió llegar a nosotros lo mejor de la antigüedad.

Elemento neutro. se localiza una fila y una columna igual que las muestras, si existen, la intersección es el neutro.

✱	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Efectivamente existe neutro, e = 3.

Elemento simétrico. Habrá que observar si el neutro está en todas las filas y columnas sin repetirse.

✱	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Efectivamente existe simétrico.

Así, pues, (A, ∗) es un grupo abeliano.

Ej.: En el conjunto S = {A, B, C, D, E, F} se define la ley de composición interna $*$, dada por la siguiente tabla:

$*$	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	D	F	A	C	E
C	C	F	B	E	A	D
D	D	A	E	B	F	C
E	E	C	A	F	D	B
F	F	E	D	C	B	A

Se pide:

1) Comprobar las propiedades.
2) Clasificar la estructura.
3) Hallar el resultado de las operaciones:

$[(A * C) * D] * F$
$[D * (A * B)] * E$

4) Averiguar los simétricos de los elementos: A, E y $(B * D)$.

1.º) **Clausura:** Sí es ley de composición interna, ya que cualquier par de S lo podemos asociar con elementos de S, es decir, que todos los elementos de la tabla pertenecen a S.

Asociativa: vamos a efectuar dos comprobaciones.

$$A * \underbrace{(B * C)}_{F} = \underbrace{(A * B)}_{F} * C$$

$$B * \underbrace{(D * E)}_{E} = \underbrace{(B * D)}_{E} * E$$

Se cumple la propiedad.

Conmutativa: Trazando la diagonal de la tabla, vemos que se cumple la propiedad por existir simetría.

Elemento neutro: Si existe: $e = A$.

¿QUE HAGO CON LOS CORDEROS?

Los sacerdotes de las primitivas religiones crearon para su uso misterioso una escritura especial a la que se dio el nombre de jeroglífica o escritura sagrada. Se trataba de una escritura de signos combinados con figuras más o menos reales.

Al destruirse estas antiguas civilizaciones se perdió totalmente su uso como tal escritura, conservándose no obstante como entretenimiento.

Entre los años 1.600 al 1.700 se puso de moda poner colgados en las puertas de las tiendas carteles con símbolos y dibujos para indicar la actividad a que se dedicaban, poniendo a prueba el ingenio de los transeúntes. En el siglo XIX hicieron furor, y hoy día no existe periódico que no tenga una sección dedicada a ellos, llegándose incluso a publicar numerosas revistas especializadas en que toda ella está dedicada a este tema en sus muchas variedades.

¿CUANTOS PERRITOS NACIERON?

La zona natural en que hoy se encuentra el Estado chino es la cuna de una civilización muy antigua.

Hace medio millón de años, y rodeados de una frondosa vegetación, vivían los grandes animales de la época.

Aquí se desarrollaron una parte de nuestros más lejanos antepasados. Los huesos del "Hombre de Pekín", descubiertos en la cueva de Chukutien, cercana a esta capital, atestiguan una capacidad cerebral entre 1.000 y 1.300 cm^3, esta última ya cercana al hombre actual.

En esta gran zona euroasiática meridional es donde más restos se han encontrado.

De cualquier forma, la cuestión de determinar con exactitud el lugar geográfico en el que el hombre apareció por primera vez, no está resuelto todavía.

Muchos estudiosos opinan que sería en una zona determinada del continente africano; fue aquí donde se encontraron los simios fósiles que más se parecen al hombre.

Elemento simétrico. Sí existe por estar el neutro en todos las filas y columnas sin repetirse.

2.º A la vista de las propiedades (S, $*$) es un grupo abeliano.

3.º $[(A * C) * D] * F = [C * D] * F = E * F = B$

$[D * (A * B)] * E = [D * B] * E = A * E = E$

La operativa es fácil, se trata de ir eligiendo los elementos de dos en dos, e ir obteniendo resultados por la tabla.

4.º Simétrico de A = A.

Simétrico de E = C

Simétrico de (B $*$ D) = simétrico de A = A

Para hallar los simétricos, hay que tener en cuenta la propiedad del elemento simétrico $a * a' = e$. Como el neutro es A, nos introducimos por la fila muestra y vamos bajando hasta que nos encontremos con el neutro y el simétrico lo obtenemos mirando en la columna muestra.

Ej.: En el conjunto A = {1, 2, 3, 6} se define el máximo común divisor como ley de composición interna.

Clasificar la estructura.

Este es un caso de problema, donde es necesario preparar o tabular la tabla para comprobar las propiedades. Vamos a llamar al m.c.d. por $*$ para facilitar luego la comprobación de las propiedades.

(*) m.c.d.	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

Obsérvese que el relleno de la tabla se ha obtenido hallando el m.c.d. de cada par o grupo de dos elementos correspondientes a la fila y columna muestras.

Clausura. Sí es ley de composición interna, ya que todos los elementos de la tabla son de A.

Asociativa

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$1 * (2 * 3) = (1 * 2) * 3$$

$$\underbrace{1 * 1}_{1} \qquad \underbrace{1 * 3}_{1}$$

Sí se cumple.

Conmutativa, sí se cumple.

Elemento Neutro, sí posee, e = 6.

Elemento Simétrico, no posee.

(A, *) es un semigrupo abeliano con elemento neutro.

Ej.: Se da el conjunto A = {a, b}. En el conjunto P (A) se define la intersección (∩) como la ley de composición interna. Clasificar la estructura. Lo primero es hallar el conjunto P (A):

$$P(A) = \{\{a\}\ \{b\}\ \{a, b\}\ \{\ \}\}$$

A continuación tendremos que fabricarnos la tabla de la ley.

∩	{a}	{b}	{a, b}	{ }
{a}	{a}	{ }	{b}	{ }
{b}	{ }	{b}	{b}	{ }
{a, b}	{a}	{b}	{a, b}	{ }
{ }	{ }	{ }	{ }	{ }

Pasaremos a comprobar las propiedades.

Cerrada Si la ley de composición interna ya que todos los elementos de la tabla pertenecen a P (A).

Asociativa: a * (b * c) = (a * b) * c. Adaptamos la propiedad a esta situación.

$$\{a\} \cap \underbrace{(\{b\} \cap \{a, b\})}_{\{a\} \cap \{b\}} = \underbrace{(\{a\} \cap \{b\})}_{\{\ \}} \cap \{a, b\}$$

$$\underbrace{\{a\} \cap \{b\}}_{\{\ \}} \qquad \underbrace{\{\ \} \cap \{a, b\}}_{\{\ \}}$$

ADIVINAR LA EDAD

Dígale a un amigo que a la edad que tiene le sume 90. Al resultado de esta suma que le tache el número que forma la centena y lo añada a la cifra formada de decenas y unidades. Cuando Vd. sepa esta cantidad súmele 9 y ésta será la edad.

EJEMPLO

Edad: 50 años.

50 + 90 = 140

~~1~~40 + 1 = 40 + 1 = 41

41 + 9 = 50

NOTA: Esto sirve sólo para personas que tengan más de 10 años.

Sí se cumple, por dar los dos miembros igual.

Conmutativa: Sí se cumple, ya que al trazar la diagonal de la tabla existe simetría de elementos en cuanto a su colocación.

Elemento Neutro: Si existe e = {a, b}.

Elemento Simetrico: No existe, por no estar el neutro en todas las filas y columnas.

Luego (P (A), ∩) es un semigrupo abeliano con elemento neutro.

Ej.: En el conjunto de N de los números naturales se define la siguiente ley de composición interna: ∗

$$\left.\begin{array}{lll} a * b = a & \text{si} & a < b \\ a * b = b & \text{si} & a > b \\ a * b = a = b & \text{si} & a = b \end{array}\right\} \quad \forall a, b \in N$$

Averiguar la estructura que alcanza N con ∗.

Para estudiar las propiedades, vamos a formalizar un trozo de lo que sería la tabla de doble entrada infinita, teniendo en cuenta que cuando hagamos la composición de dos elementos deberemos estar atentos a ver si el primero es menor que el segundo, en cuyo caso el resultado es el primero a ∗ b = a, si a < b, a ver si el primero es mayor que el segundo, en cuyo caso el resultado es el segundo (a ∗ b = b si a > b), o si el primero es igual al segundo, en cuyo caso el resultado es cualquiera de ellos (a ∗ b = a = b si a = b).

En las filas de muestras de la tabla representaremos una pequeña parte del conjunto N.

∗	0	1	2	3	4	5	
0	0	0	0	0	0	0	_ _ _ _ _ _
1	0	1	1	1	1	1	_ _ _ _ _ _ _
2	0	1	2	2	2	2	_ _ _ _ _
3	0	1	2	3	3	3	_ _ _ _ _
4	0	1	2	3	4	4	_ _ _ _
5	0	1	2	3	4	5	_ _ _ _ _ _
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

JUICIO

Se detiene a tres personas sospechosas de un mismo robo. Las pruebas son las siguientes:

Si el detenido A es inocente, el B es culpable.

Si el B es culpable, el A es inocente.

Los detenidos C y A no se conocen y el C nunca trabaja solo.

Si el B es culpable, C también lo es.

¿Quiénes fueron los ladrones?

SOLUCION

Si el C y el A no se conocen, mal pudieron hacer el trabajo juntos.

Si el C no trabaja nunca solo es que tuvo que trabajar con el B.

Al ser A inocente el B es culpable.

Luego los culpables fueron el B y C.

Por ejemplo: $1 * 3 = 1$, por ser $1 < 3$; $3 * 2 = 2$ por ser $3 > 2$; $4 * 4 = 4$ por ser $4 = 4$.

Comenzamos a comprobar las propiedades:

Asociativa: $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Elegimos tres elementos cualquiera de los que hemos representado en la tabla.

$$\underbrace{0 * \underbrace{(1 * 2)}_{1}}_{0} = \underbrace{\underbrace{(0 * 1)}_{0} * 2}_{0}$$

Si se cumple la propiedad. Los dos miembros dan resultados idénticos.

Conmutativa: Si trazamos la diagonal de la tabla veremos que existe simetría en cuanto a la posición de los elementos, cosa que si la hacemos extensiva a lo que sería realmente la tabla completa, nos da pie para asegurar que la propiedad se cumple en vista de la formación que se desarrolla en la tabla.

Elemento Neutro: No existe porque no hay una fila y una columna igual que las muestras (no fiarse en la última fila y última columna que aparentemente parecen iguales a las muestras, puesto que la tabla continuaria y aparecerían a continuación más cincos).

Elemento Simétrico: Puesto que no existe neutro, tampoco existe simétrico.

Luego (N, *) es un Semigrupo abeliano.

Ej.: En el conjunto N se define la suma como ley de composición interna. Localizar el tipo estructural.

Pasamos a comprobar las propiedades:

Cerradura: Es ley de composición interna, ya que la suma de sus dos elementos o más cualquiera de N, siempre da un nuevo elemento de N.

Asociativa: $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Elegiremos tres elementos de N (por ejemplo, 1, 2, 3). El signo * se transforma ahora en el + (operación que nos han definido en N).

$$\underbrace{1 + \underbrace{(2 + 3)}_{5}}_{6} = \underbrace{\underbrace{(1 + 2)}_{3} + 3}_{6}$$

Efectivamente vemos que los dos miembros o partes de la igualdad dan el mismo resultado. Haciendo, de forma lógica, extensiva esta propiedad a todos los elementos de N, vemos que es cierto que se cumple.

Conmutativa: $a * b = b * a$.

En la tumba de Tutankamon se encontraron palos curvados arrojadizos para la caza de aves silvestres. Se puede considerar los precedentes del bumerang que utilizaron posteriormente los indígenas australianos. La primera competición de tipo internacional fue establecida en 1970, creando los campeonatos mundiales de esta especialidad. La mayor distancia alcanzada por el bumerang, antes de iniciar la vuelta, es de 89 metros.

Los hombres actuales convierten en deporte lo que en la antigüedad fue actividad precisa para la conservación de la vida o para conseguir el alimento necesario.

El arrojar palos para abatir la caza puede considerarse una actividad ligada casi al inicio del hombre prehistórico. Sólo su posterior sentido del cálculo y la observación de las formas permitió construirlo con una forma tal, que su impulso inicial le hiciera volver al punto de partida.

EL RASCACIELOS Y EL ASCENSOR

Una persona de pequeña estatura trabaja en el piso 37 de un rascacielos. Todos los días cuando va a trabajar sólo sube en ascensor hasta el piso 32, subiendo el resto de los pisos andando por las escaleras. Por el contrario, al terminar su jornada laboral esta persona baja en ascensor hasta el portal.

La pregunta que hacemos es la siguiente: ¿Por qué no sube hasta el piso 37 en ascensor?

SOLUCION

La explicación es bien lógica. Debido a su pequeña estatura, esta persona no llega a pulsar el botón del piso 37. Sólo llega hasta el del piso 32, no teniendo más remedio que subir los cinco pisos restantes peldaño a peldaño.

De la misma forma elegimos dos elementos de N (por ejemplo, 3 y 4), teniendo en cuenta también que el signo $*$ equivale en este caso al $+$.

$$\underbrace{3+4}_{7} = \underbrace{4+3}_{7}$$

Efectivamente se cumple (ya se sabe que en la suma, el orden de los sumandos no altera el valor de la suma).

Elemento Neutro $a * e = a$.

No hay duda que el elemento neutro es el cero, ya que cualquier elemento de N, al sumarlo con el cero, da el mismo elemento:

$$1 + 0 = 1,\ 2 + 0 = 2,\ 3 + 0 = 3,\ 4 + 0 = 4 \ldots$$

Existe elemento neutro.

Elemento Simétrico $a * a' = e$.

Cualquier elemento de N, para que sumado con otro resulte el neutro (0) debe ser negativo ($1 + (-1) = 0$), los elementos negativos no están incluidos en N, luego no existe elemento simétrico.

Así que el conjunto N, con la operación $+$, a la vista de las propiedades resulta ser un semigrupo abeliano con elemento neutro o un semigrupo abeliano con elemento neutro aditivo (ya se ha dicho que cuando la operación es la suma, se le suele añadir la palabra aditivo al nombre de la estructura).

— Ej.: En este ejemplo se va a exponer la clasificación de un tipo de estructuras, que en cierto modo tienen importancia, aunque su demostración no se va a hacer. Con los conocimientos que se poseen del tema, se puede llegar con facilidad a la clasificación que se ofrece.

- $(N, +)$ Semigrupo abeliano con elemento neutro aditivo.
- $(N, \cdot)$ Semigrupo abeliano con elemento neutro multiplicativo.
- $(Z, +)$ Grupo abeliano aditivo.
- $(Z, \cdot)$ Semigrupo abeliano con elemento neutro multiplicativo.
- $(Q, +)$ Grupo abeliano aditivo.
- $(Q, \cdot)$ Grupo abeliano multiplicativo.
- $(R, +)$ Grupo abeliano aditivo.
- $(R, \cdot)$ Grupo abeliano aditivo.

Ej.: Considerando un subconjunto de R, tal como $a + b\sqrt{2}$. $\forall\ a, b \in Q$, averiguar si es subgrupo respecto a la operación suma.

Efectivamente los números de la forma $a + b\sqrt{2}$, con a y b pertenecientes a Q, son números pertenecientes a R y además con categoría de subconjunto, ya que, además de estos, existen en R

infinidad de números más distintos de los del tipo expuesto. Como es subconjunto de R, para ver si es subgrupo de R habrá que ver si los números de la forma $a + b\sqrt{2}$ poseen estructura de grupo, respecto a la operación +, ya que (R, +) es grupo abeliano.

Pasamos a comprobar las propiedades:

Asociativa: $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Téngase en cuenta que ahora cada elemento debe ser de la forma $a + b\sqrt{2}$, ó, $c + d\sqrt{2}$, etc., y el signo $*$ será sustituido por +.

$$\underbrace{(a + b\sqrt{2}) + \underbrace{[(c + d\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2})]}}_{(a + b\sqrt{2}) + [(c + p) + (d + q)\sqrt{2}]} = \underbrace{\underbrace{[(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})]}_{[(a + c) + (b + d)\sqrt{2}]} + (p + q\sqrt{2})}$$

$$(a + c + p) + (b + d + q)\sqrt{2} \qquad (a + c + p) + (b + d + q)\sqrt{2}$$

Efectivamente se cumple la propiedad.

Conmutativa: $a * b = b * a$.

$$\underbrace{(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})}_{(a + c) + (b + d)\sqrt{2}} = \underbrace{(c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2})}_{(c + a) + (d + b)\sqrt{2}}$$

Se cumple la propiedad.

Elemento Neutro: $a * e = a$.

El neutro será de la forma $x + y\sqrt{2}$, donde x e y serán las incógnitas a encontrar.

$$\underbrace{(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2})}_{(a + x) + (b + y)\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2} \quad \begin{cases} a + x = a \Rightarrow x = o \\ b + y = b \Rightarrow y = o \end{cases}$$

Luego el elemento neutro es de la forma $o + o\sqrt{2}$ y si lo tiene, ya que este elemento pertenece a R ($e = o = o + o\sqrt{2}$).

Elemento Simétrico: $a * a' = e$.

El simétrico será de la forma $x' + y'\sqrt{2}$, donde x' e y' serán las incógnitas a encontrar.

$$\underbrace{(a + b\sqrt{2}) + (x' + y'\sqrt{2})}_{(a + x') + (b + y')\sqrt{2}} = o + o\sqrt{2} \quad \begin{cases} a + x' = o \Rightarrow x' = -a \\ b + y' = o \Rightarrow y' = -b \end{cases}$$

Luego el elemento simétrico es de la forma $-a - b\sqrt{2}$, y si lo tiene, ya que este elemento pertenece a R ($a' = -a - b\sqrt{2}$).

Luego el conjunto de los números $(a + b\sqrt{2}, +)$ es un grupo abeliano aditivo, y como es subconjunto de R, que también es grupo abeliano aditivo, podemos asegurar que cumple el primer requisito para que sea subgrupo de R:

$$(a + b\sqrt{2}, +) \subset R$$

La construcción más antigua que se conserva y que puede atribuirse con certeza al trabajo del hombre es un círculo de bloques de lava realizado con poca habilidad y que pudiera ser la parte inferior de una primitiva choza. Se encontró en Tanzania en una excavación que descubrió restos del Paleolítico inferior; en su interior también se encontraron huesos e instrumentos de piedra que posiblemente sirvieron para cazar o para realizar algún trabajo.

A esta construcción se le atribuye una antigüedad de 2.000.000 de años. Mucho más posteriores son los restos de un pueblo entero de cabañas, 21 chozas en total, con piedras dispuestas en forma de hogares para guisar y con señales de haber sido habitadas mucho tiempo y que se encuentran en Niza, en una excavación, a las que se les atribuye una antigüedad de 120.000 años; estos restos pueden pertenecer a una tribu que de alguna manera ya cultivase la tierra o practicase alguna forma de cría de animales para asegurar su existencia en un lugar de residencia fijo.

Los estudios modernos consiguen descifrar el enigma de las civilizaciones ya totalmente desaparecidas.

La arqueología moderna se desarrolló de una forma sistematizada en el siglo pasado, aunque fue iniciada en el siglo XVIII por el alemán Winckelmann.

Las naciones colonizadoras mostraron una gran curiosidad por el tema y fomentaron expediciones en las que sabios eminentes excavaron sistemáticamente zonas determinadas. Los descubrimientos más espectaculares fueron:

En 1871: restos de Troya.

En 1876: 1.ª civilización micénica de Knossos.

En 1899: la ciudad sumeria de Ur en Mesopotamia.

En 1922: la tumba de Tutankhamen en Egipto.

Esta última causó una gran sensación por ser la única encontrada casi intacta, con fabulosos tesoros, y que permitió el estudio y la medición de todos los objetos, determinándose exactamente fechas, causas de la muerte del faraón, duración de los productos y materiales empleados en aquella época, etcétera.

Ultimamente la aviación, por medio de la fotografía aérea de rayos infrarrojos y los modernos satélites que circundan la tierra descubren zonas propicias, pero en último lugar son los equipos humanos los que con su paciente dedicación descubren los valiosos restos de culturas pasadas.

Además, si elegimos dos elementos cualesquiera del subgrupo: $a + b\sqrt{2}$ y $c + d\sqrt{2}$ la composición del primero con el simétrico del segundo reproduce elementos del mismo conjunto:

$$(a + b\sqrt{2}) + (-c - d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \begin{cases} a - c \in Q \\ b - d \in Q \end{cases}$$

6.–CONSIDERACIONES EN LOS GRUPOS

– Se denomina **grupo finito** a cualquier grupo que tenga un número finito de elementos, siendo esta cantidad de elementos el **orden del grupo.**

– Se entiende por **sistema generador** del grupo al conjunto de elementos del grupo, tales que cualquiera de ellos se pueda obtener mediante operaciones entre ellos.

Ej.: En el grupo (Z, +) se puede decir que el conjunto $\{1, -1\}$ es un sistema generador de él, ya que cualquier elemento lo podemos obtener al sumar las veces que sea necesario el 1, –1 o ambos a la vez.

– Cualquier grupo cuyo sistema generador contenga un solo elemento, se dice que es **monógeno.**

– Se entiende por **grupo cíclico** a aquel que posee un elemento que reproduce a los restantes del grupo.

Ej.: En el conjunto A = {a, b, c, d} con la ley de composición interna dada por la tabla:

✱	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Podemos afirmar que es un grupo cíclico, porque cumple todas las propiedades correspondientes a un grupo y además porque el elemento b reproduce a todos los elementos del grupo.

$b * b = c$

$b * b * b = c * b = d$

$b * b * b * b = c * b * b = d * b = a$

— Se entiende por **Clase Adjunta** de un elemento de un grupo G, respecto a un subgrupo G′ ($G' \subset G$) al conjunto de elementos que resultan de componer cada elemento de G′ con el elemento en cuestión de G.

Las clases adjuntas pueden realizarse por la derecha o por la izquierda.

Si un grupo es abeliano (posee la propiedad conmutativa), las clases adjuntas coinciden por la derecha y por la izquierda.

— Cualquier subgrupo G′ de G se le llama **invariante, distinguido o normal** cuando las clases adjuntas de cualquier elemento de G son iguales por la derecha y por la izquierda.

— Si en un grupo G se define la relación binaria R: "pertenecer a una misma clase adjunta", se produce una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia están formadas por los elementos de una misma clase adjunta.

El conjunto formado por las clases adjuntas G/R recibe el nombre de **grupo cociente.**

7.—PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Todas las propiedades que hemos estudiado anteriormente (Asociativa, Conmutativa, Neutro y Simétrico) son propiedades que se pueden manipular, y asi debe ser, con una sola ley de composición interna y operación.

Sin embargo, la propiedad distributiva es una propiedad que necesariamente necesita dos leyes de composición interna para poder manipularse, leyes que las vamos a simbolizar de distinta forma, para distinguirlas.

1. Propiedad distributiva de la ley $*$ respecto a la ley $\perp$

$a * (b \perp c) = (a * b) \perp (a * c)$ (Distributiva por la izquierda)

$(b \perp c) * a = (b * a) \perp (c * a)$ (Distributiva por la derecha)

2. Propiedad distributiva de la ley $\perp$ respecto a la ley $*$.

$a \perp (b * c) = (a \perp b) * (a \perp c)$ (Distributiva por la izquierda)

$(b * c) \perp a = (b \perp a) * (c \perp a)$ (Distributiva por la derecha)

Para la propiedad distributiva podemos hacer las siguientes consideraciones:

1. Cuando la propiedad distributiva lo es por la izquierda y por la derecha, se dice que es distributiva simplemente.

2. Si la ley $*$ no es conmutativa hay que comprobar respecto a la ley $\perp$, la propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha para asegurarse de que es distributiva por ambos lados.

Entre los griegos existió una leyenda según la cual el problema de la "duplicación del cubo" se originó en una visita al Oráculo de Delfos.

El Oráculo anunció que la fuerte epidemia que asolaba a gran parte de la nación cesaría si se duplicaba en tamaño un altar cúbico dedicado a Apolo. Los arquitectos cayeron en el error de "duplicar" la arista del cubo con lo cual el volumen resultó ocho veces mayor. Los matemáticos no quedaron satisfechos y el Oráculo menos todavía. Examinaron nuevamente el problema, comprendiendo que la solución correcta no era la duplicación del lado sino su multiplicación (del "lado") por la raíz cúbica de 2. No se pudo resolver con regla y compás, tuvieron que inventar otros instrumentos y curvas superiores.

El Oráculo fue aplacado y la epidemia cesó. Usted puede creer o no en la leyenda, pero no puede duplicar el cubo.

Los expertos en el valor de las monedas se llamaron cambistas, porque además de conocer el valor de cada una de ellas las cambiaban por las de otras ciudades, quedándose con una comisión por sus servicios.

Estos cambistas empezaron a hacer préstamos a los comerciantes necesitados cobrando también una comisión, que desde entonces se llama interés.

Parece ser que para realizar sus operaciones al aire libre en ferias y en mercados, extendían en unos bancos especiales sus diferentes monedas, llamándoseles por eso banqueros, nombre que desde entonces ha continuado empleándose.

Muchos banqueros tenían lugares para el cambio en diferentes ciudades, y cuando un comerciante tenía que hacer operaciones de compra o venta, acudía a su banquero, el cual recibía el metálico entregándole un pagare que podía hacer efectivo en otra feria o mercado.

En caso contrario se puede asegurar que es simplemente distributiva con la sola comprobación por la izquierda y por la derecha.

Ej.: Cuando comprobamos la propiedad distributiva del producto respecto a la suma (por ejemplo en el conjunto N), con sólo hacerlo por uno de los lados podemos asegurar que es simplemente distributiva, ya que la operación producto en N es conmutativa.

$$\underbrace{2 \cdot \underbrace{(3+5)}_{8}}_{16} = \underbrace{\underbrace{2 \cdot 3}_{6} + \underbrace{2 \cdot 5}_{10}}_{16} \qquad \text{(Distributiva por la izquierda)}$$

$$\underbrace{\underbrace{(3+5)}_{8} \cdot 2}_{16} = \underbrace{\underbrace{3 \cdot 2}_{6} + \underbrace{5 \cdot 2}_{10}}_{16} \qquad \text{(Distributiva por la derecha)}$$

Ej.: Averiguar si en el conjunto Q con las leyes de composición interna: $a * b = a + b - 8$ y $a \perp b = a + b - ab$; $\forall\, a, b \in Q$

Planteamos el enunciado de la propiedad distributiva.

— Distributiva de $*$ respecto a $\perp$.

$$\underbrace{a * \underbrace{(b \perp c)}}_{a*(b+c-bc)} = \underbrace{\underbrace{(a * b)}_{(a+b-8)} \perp \underbrace{(a * c)}_{(a+c-8)}}_{(a+b-8)+(a+c-8)-(a+b-8)(a+c-8)} \qquad \text{(Por la izquierda)}$$

$$a + (b + c - bc)$$

Se ve inmediatamente que no coinciden los resultados de los dos miembros.

$$\underbrace{\underbrace{(b \perp c)}_{(b+c-bc)} * a}_{(b+c-bc)+a-8} = \underbrace{\underbrace{(b * a)}_{(b+a-8)} \perp \underbrace{(c * a)}_{(c+a-8)}}_{(b+a-8)+(c+a-8)-(b+a-8)(c+a-8)} \qquad \text{(Por la derecha)}$$

También se ve inmediatamente que no coinciden los resultados de los dos miembros.

Definitivamente no es distributiva de $*$ con respecto a $\perp$.

— Distributiva de $\perp$ respecto a $*$.

$$\underbrace{a \perp \underbrace{(b * c)}}_{a \perp (b+c-8)} = \underbrace{\underbrace{(a \perp b)}_{(a+b-ab)} * \underbrace{(a \perp c)}_{(a+c-ac)}}_{(a+b-ab)+(a+c-ac)-8} \qquad \text{(Por la iz.)}$$

$$a + (b + c - 8) - a(b + c - 8)$$

No coinciden los resultados

$$\underbrace{\underbrace{(b * c)}_{(b+c-8)} \perp a}_{(b+c-8)+a-(b+c-8)a} = \underbrace{\underbrace{(b \perp a)}_{(b+a-ba)} * \underbrace{(c \perp a)}_{(c+a-ca)}}_{(b+a-ba)+(c+a-ca)-8} \qquad \text{(Por la der.)}$$

No coinciden los resultados.

Definitivamente tampoco es distributiva de $\perp$ respecto a $*$.

8.–ANILLOS

Son estructuras algebraicas que necesitan dos leyes de composición interna para poder manifestarse y obedecen a la siguiente clasificación:

– ANILLO
- Grupo abeliano respecto a una de las leyes $*$.
- Asociativa respecto a la otra ley $\perp$.
- Distributiva de $\perp$ respecto a $*$.

– ANILLO CONMUTATIVO
- Anillo.
- Conmutativa respecto a la ley $\perp$.

– ANILLO CONMUTATIVO CON ELEMENTO NEUTRO O ELEMENTO UNIDAD
- Anillo.
- Conmutativa respecto a la ley $\perp$.
- Elemento neutro respecto a la ley $\perp$.

– Anillo de integridad. –Se llama así a cualquier anillo conmutativo que no posea divisores de cero.

– Dominio de integridad. –Se llama así a cualquier anillo conmutativo con elemento unidad y sin divisores de cero.

NOTA.–Reciben el nombre de **divisores de cero** aquellos elementos que compuestos respecto a la segunda ley $\perp$ (frecuentemente esta ley de composición interna suele ser el producto), dan cero de resultado sin que ninguno de los dos sea cero.

Esta cuestión la observaremos con más detalle en el tema de Congruencias Numéricas.

– Subanillo: Cualquier parte o subconjunto no vacío de un anillo, que a su vez sea anillo respecto a las mismas leyes de composición interna, se dice que es un subanillo de aquél.

Es decir, que para que una estructura sea subanillo A′ de un anillo A, es necesario y suficiente que reúna los siguientes requisitos:

1.º $A' \subset A$

$\forall a, b \in A' \Rightarrow a * b' \in A'$

$\forall a, b \in A' \Rightarrow a \perp b' \in A'$

– Ideal. Se llama así a cualquier subconjunto I de un anillo A, que reúna las condiciones siguientes:

1.º Debe ser subgrupo respecto a la ley $*$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, x \in A \\ \forall\, a \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a \perp x \in I & \text{(ideal por la derecha)} \\ x \perp a \in I & \text{(ideal por la izquierda)} \end{array}\right.$$

Cuando sea ideal por la derecha y por la izquierda recibe el nombre de **Ideal bilátero**.

Los pueblos denominados bárbaros eran pueblos nómadas que se habían trasladado atravesando lentamente las grandes llanuras de Rusia, lo que hoy constituye las estepas Siberianas.

Al ser nómadas y viajar a caballo, sus riquezas tenían que acumularlas en objetos que fueran fácilmente transportables. En los primeros tiempos no desarrollaron la arquitectura; se limitaban a plantar sus tiendas o a construir pequeños albergues. Así concentraron su actividad pacífica en el arte de la joyería; crearon piezas de extraordinaria belleza en las que mezclaban motivos vegetales y animales; tenían un gusto primitivo con una preferencia por los colores vivos y los contrastes muy acentuados. Se cree que tuvieron lejanos contactos con las formas chinas. El caballo, parte vital en su existencia, se representa en gran parte de sus joyas, placas, pectorales, cinturones, pulseras, y brazaletes, realizados en plata y en oro, completan los testimonios de su arte, que alcanza gran altura expresiva.

En España el primer Banco público fue la "Taula de canvi" (mesa de cambio) inaugurado, por la municipalidad de Barcelona, el dia 30 de Enero de 1401. Funcionó con regularidad hasta 1853, en que fue absorbido por el Banco de España.

En el año 1782 se fundó el Banco de San Carlos con la misión de facilitar las operaciones de comercio, administrar los asientos de los ejércitos de mar y tierra y tomar a su cargo los asientos del extranjero.

En el año 1829 se fundó el Banco Español de San Fernando al que se le concede la facultad de emitir billetes.

En el año 1844 se funda el Banco Español de Isabel II con más amplias facultades y un campo de actuación mucho más amplio.

Posteriormente, en 1847 se fusionan los dos anteriores tomando el nombre de Nuevo Banco Español de San Fernando.

Finalmente, en 1856 se constituye el actual Banco de España, con el nombre que conserva en la actualidad, siendo nacionalizado en 1962, y conservando el privilegio exclusivo de acuñación de moneda y emisión de billetes.

Ej.: En el conjunto $Z \times Z$ de los pares (a, b) se definen las leyes de composición interna suma y productos siguientes:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c + b \cdot d)$$

$\forall\, a, b, c, d \in Z$. Averiguar si se alcanza la estructura de anillo.

Ya se ha dicho que trabajando con la suma y el producto como operaciones, la suma es la que manda cuando se quiera alcanzar una estructura de anillo (es decir, que la propiedad distributiva se cumple del producto respecto a la suma). Pasamos, pues, a comprobar las propiedades:

Con la ley +:

– Asociativa: $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Adaptándola a las nuevas circunstancias en que los elementos son pares y la ley es +:

$$\underbrace{(a, b) + [(c, d) + (p + q)]}_{\underbrace{(a, b) + (c + p, d + q)}_{(a + c + p, b + d + q)}} = \underbrace{[(a, b) + (c, d)] + (p, q)}_{\underbrace{(a + c, b + d) + (p, q)}_{(a + c + p, b + d + q)}}$$

Efectivamente se cumple.

– Conmutativa: $a * b = b * a$.

$$\underbrace{(a, b) + (c, d)}_{(a + c, b + d)} = (c, d) + (a, b)$$
$$(a + c, b + d) = (c + a, d + b)$$

Efectivamente se cumple.

– Elemento neutro $a * e = a$.

El elemento neutro adopta ahora la forma de un par, por ejemplo $e = (x, y)$.

$$\underbrace{(a, b) + (x, y)}_{(a + x, b + y) = (a, b)} = (a, b) \begin{cases} a + x = a \Rightarrow x = o \\ b + y = b \Rightarrow y = o \end{cases}$$

$$e = (x, y) = (o, o)$$

– Elemento Simétrico $a * a' = e$.

El elemento simétrico adopta ahora la forma de un par, por ejemplo $e = (x', y')$.

$$\underbrace{(a, b) + (x', y')}_{(a + x', b + y') = (o, o)} = (o, o) \begin{cases} a + x' = o \Rightarrow x' = -a \\ b + y' = o \Rightarrow y' = -b \end{cases}$$

$$a' = (x', y') = (-a, -b)$$

Luego el conjunto $(Z \times Z, +)$ es un grupo abeliano.

2.º Con la ley.

– Asociativa $a * (b * c) = (a * b) * c$.

$$(a, b) \cdot \underbrace{[(c, d) \cdot (p, q)]}_{(a\,c\,p,\ b\,d\,q)} = \underbrace{[(a, b) \cdot (c, d)]}_{(a\,c\,p,\ b\,d\,q)} \cdot (p, q)$$

$$\underbrace{(a, b) \cdot (c \cdot p, d \cdot q)}_{(a\,c\,p,\ b\,d\,q)} \qquad \underbrace{(a \cdot c, b \cdot d) \cdot (p, q)}_{(a\,c\,p,\ b\,d\,q)}$$

Efectivamente se cumple.

En definitiva $(Z \times Z, \cdot)$ es un semigrupo.

3.º Con la ley + y ·

– Distributiva: $a * (b \perp c) = (a * b) \perp (a * c)$.

$$(a, b) \cdot \underbrace{[(c, d) + (p, q)]}_{(a, b) \cdot (c + p, d + q)} = \underbrace{[(a, b) \cdot (c, d)]}_{(ac, bd)} + \underbrace{[(a, b) \cdot (p, q)]}_{(ap, bq)}$$

$$\underbrace{(ac + ap, bd + bq)}_{(ac + ap, bd + bq)}$$

Efectivamente se cumple.

Definitivamente $(Z \times Z, +, \cdot)$ es un anillo, por reunir todos los requisitos necesarios.

9.–CUERPOS

Son estructuras algebraicas que necesitan dos leyes de composición interna para poder manifestarse y obedecen a la siguiente definición:

CUERPOS: (Grupo abeliano respecto a una de las leyes $*$.
Grupo abeliano respecto a la otra ley $\perp$.
Distributiva que ligue las dos leyes.

NOTA.–Un cuerpo no puede tener divisores de cero, y, como consecuencia, se desprende que debe ser anillo de integridad.

Ej.: En el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ se definen las leyes de composición interna $*$ y $\perp$, dadas por las siguientes tablas:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

*	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

El hombre, que no ceja nunca en sus sueños, creyó firmemente que podía resolver el problema de la vejez encontrando un elixir de larga vida que proporcionara a la humanidad la eterna juventud. Por este empeño lucharon en todas las épocas sabios, alquimistas, charlatanes y atrevidos, unos con estudios y cálculos mejor o peor enfocados, pero creyendo sinceramente que podían resolverlo, y otros tratando de engañar a los demás con una capa oscura de sabiduría que confundía a los ignorantes. Hoy día, reaparece esta cuestión bajo la forma de ensayos y trabajos de laboratorio que, con tratamientos a individuos agotados, pretenden darles nuevas energías juveniles. Todavía, en estos arcanos de la esencia de la vida no ha podido penetrar el hombre, y sus conquistas en este campo no son tan espectaculares como él desearía.

En la Edad Media se originó una polémica con el fondo de la usura o préstamo de dinero con grandes intereses. Los escritos de Dante reservaban en su infierno un lugar destacado para los que la practicaban. Gerson sostenía que era contrario a la naturaleza que el dinero engendrase dinero.

Aunque la desaprobación de la usura por parte de la Iglesia se orientó principalmente a la más clara y manifiesta, es decir, a los que acrecentaban enormemente el capital de las sumas prestadas.

Los banqueros de la época tuvieron mucho cuidado en operar de forma que no incurriesen en esta censura eclesiástica.

Se consideraba el contrato de préstamo una transacción comercial, una transferencia de dinero, como si de una mercancía se tratase y, por tanto, se justificaba el cobro del servicio. Ya en el siglo XV los franciscanos fueron autorizados a cobrar honorarios por los préstamos que concedían en sus casas de empeños.

Poco más tarde el papa León X aprobó formalmente los "monti di pietà" o casas de empeño.

Averiguar si A alcanza la estructura de cuerpo.

Pasamos a comprobar las propiedades.

1.º Ley $*$

– **Asociativa:**

$$\underbrace{a * \underbrace{(b * c)}_{d}}_{d} = \underbrace{\underbrace{(a - b)}_{b} * c}_{d}$$

Sí se cumple.

– **Conmutativa:** Trazando la diagonal de la tabla $*$ se observa que existe la propiedad.

– **Elemento Neutro:** Buscando una fila y una columna iguales si existe neutro y es $e = a$.

– **Elemento Simétrico:** Si existe (está el neutro en todas las filas y columnas).

Luego $(A, *)$ es un grupo abelinao.

2.º Ley $\perp$.

– **Asociativa:**

$$\underbrace{a \perp \underbrace{(b \perp c)}_{c}}_{a} = \underbrace{\underbrace{(a \perp b)}_{a} \perp c}_{a}$$

Sí se cumple.

– **Conmutativa.** Sí existe.

– **Elemento Neutro:** Sí existe $e = b$.

– **Elemento Simetrico:** Sí existe, excepto para el elemento a (detalle muy frecuente en los cuerpos).

Luego $(A, \perp)$ es un grupo abeliano.

3.º Leyes $*$ y $\perp$.

– **Distributiva:**

$$\underbrace{a * \underbrace{(b \perp c)}_{c}}_{c} = \underbrace{\underbrace{(a * b)}_{b} \perp \underbrace{(a * c)}_{c}}_{c}$$

Sí se cumple.

Luego $(A, *, \perp)$ es un cuerpo.

Ej.: En este ejemplo se van a exponer la clasificación de un tipo de estructuras que en cierto modo tienen importancia, aunque su demostración se va a omitir, con los conocimiento que se poseen del tema, se puede llegar con facilidad a la clasificación que se ofrece.

$(N, +, \cdot)$ No admite clasificación según lo establecido.

$(Z, +, \cdot)$ Anillo conmutativo con elemento neutro.

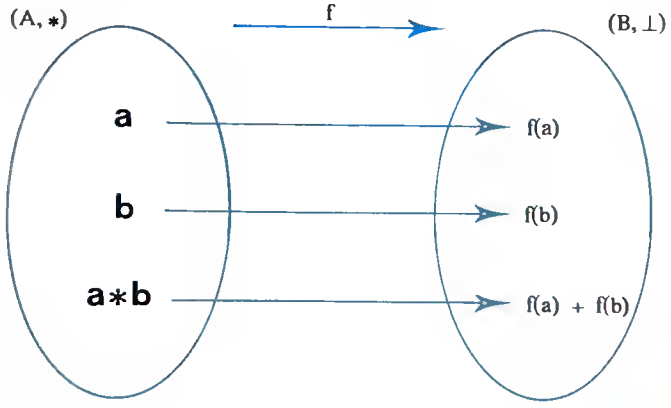
$(Q, +, \cdot)$ Cuerpo.

$(R, +, \cdot)$ Cuerpo.

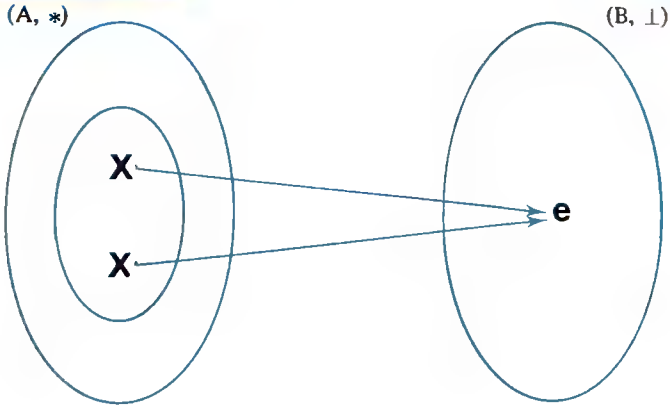
10.—APLICACIONES ENTRE ESTRUCTURAS

A.—Homomorfismo

Se llama así a cualquier aplicación entre dos estructuras $(A, *)$ y $(B, \perp)$. (Cuando los conjuntos de partida y llegada son iguales, también recibe el nombre de **Endomorfismo**).



Al conjunto formado por todos los elementos de $(A, *)$ que tienen por imagen al elemento neutro de $(B, \perp)$, se le llama **nucleo del homomorfismo** y se representa por N (f) o Ker (f).



La mayoría de los prestamistas europeos de la Edad Media eran cristianos y gran parte de ellos italianos. Había también prestamistas judíos y de otras nacionalidades que actuaban sin licencia real y por lo tanto al aumentar sus riesgos elevaron paralelamente las tasas de interés.

Las operaciones mercantiles y los organismos que las efectuaban tendieron a ser cada vez mayores, esforzándose por monopolizar las actividades por zonas o por materias.

Las empresas familiares se fueron haciendo cada vez más decididas, emprendiendo nuevas actividades. El incremento del capital y el desarrollo del negocio implicaba un desarrollo y una organización más eficiente. Sin embargo, los cambios económicos atrajeron la atención de los estudiosos hacia los problemas del dinero, el crédito y el comercio.

Ciertos matemáticos del siglo XIV, Jacobo de Florencia y Paolo Dagomari, redactaron tratados acerca del cálculo de intereses, los pesos, las medidas y el cambio de las monedas.

Ej.: Entre los conjuntos (N, +) y (N, ·) se establece la correspondencia $f(x) = 2^x$. Averiguar si es un homomorfismo y no núcleo.

– Es un homomorfismo por tener cada elemento de (N, +), una sola imagen en (N, ·), condición necesaria y suficiente para ser una aplicación.

El neutro de (N, ·) es naturalmente el 1. Todos los elementos de (N, +) que tienen como imagen el 1 en (N, ·) son únicamente el 0. Luego el núcleo del homomorfismo es Ker (f) = 0.

B.—Tipos de Homomorfismos:

– Si f es sobreyectiva recibe el nombre de **epimorfismo.**

– Si f es inyectiva recibe el nombre de **monomorfismo.**

– Si f es biyectiva recibe el nombre de **isomorfismo.** (Cuando los conjuntos de partida y llegada coinciden también recibe el nombre de **automorfismo.**)

CALCULO DE PROBABILIDADES

La posibilidad de sacar cara en una moneda al tirarla al aire es de 1/2. Ahora bien, en una baraja completa de naipes españoles, por ejemplo, la posibilidad de sacar un oro (da igual qué número o figura sea) es de 10/40, o sea, de 1/4. La posibilidad de sacar sota será de 4/40, o sea, de 1/10. La posibilidad de sacar el as de oros en la misma baraja es de 1/40; sin embargo (para hacerlo más complicado), la posibilidad de sacar una sota de la baraja hemos visto que es de 4/40, pero la de sacar otra sota ya no es lo mismo sino 3/39 ó, lo que es lo mismo, 1/13. Como resultado, para sacar dos sotas seguidas se ha reducido a 1/10 × 1/13, o sea, a 1/130. Esta modificación se denomina "Ley de los sucesos condicionados". Cuando se da la primera carta de una baraja de 40 naipes, existen 39 posibilidades restantes; cuando se da la segunda hay 38 y así sucesivamente hasta 1.

Los matemáticos a esto lo llaman "40 factorial", por ejemplo: Cuatro factorial es 4 × 3 × 2 × 1, o sea, 24, se escribe (4 !); Siete factorial es 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 5.040, se escribe (7 !).

Todos estos cálculos de posibilidades son muy usados en casinos y casas de juego, principalmente en el juego de la ruleta, juego de azar en el que muchos matemáticos aficionados han crido conseguir sistemas para ganar grandes sumas.

Los jugadores siempre apuestan contra la banca, que siempre gana las apuestas o combinaciones no acertadas. Cuando la suerte cae en cero retira todas las apuestas, menos las efectuadas sobre este número, con lo que la banca lleva una ventaja de $2\frac{3}{4}$ por cien.

Pascal y Ferman, conocidos y famosos matemáticos, estudiaron ampliamente los problemas relativos al cálculo de probabilidades.

11.–RETICULOS. ALGEBRA DE BOOLE

En este apartado volvemos a estudiar de nuevo el conjunto de las partes de un conjunto dado, en función de su interés para la creación de este tipo de estructuras y de las aplicaciones que posteriormente se le pueden suponer.

A.–Concepto de Reticulo

Cuando de un conjunto A obtenemos el conjunto de las partes P (A) y le dotamos a este de dos operaciones con categoría de leyes de composición interna como son la unión (∪) y la intersección (∩), y se comprueban las siguientes propiedades:

– Asociativa: $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

– Conmutativa $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

– Simplificativa o de Absorción $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$

– Idempotente: $\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$

Podemos decir que el conjunto P (A) con las operaciones ∪ y ∩ ha adquirido la estructura de reticulo.

NOTA.–Las propiedades asociativa y conmutativa ya nos son conocidas; sin embargo, la simplificativa y la idempotente son nuevas, así que obsérvese las características de ellas.

B.–Tipos de reticulos

– Reticulo distributivo. Exige que se cumplan, además de las operaciones anteriores para el caso de retículo, también la propiedad distributiva de ∪ y respecto a ∩ y al revés.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

– Reticulo complementario. Además de poseer todas las operaciones propias del retículo, se le exige que cada elemento de P (A) tenga complementario:

$$A \cap A' = \varnothing$$
$$A \cup A' = \cup$$

Y consecuentemente el cumplimiento de las leyes de Morgan, que en este caso reciben el nombre de dualidad.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

La escuela de restauradores que trabaja en Barcelona lleva más de medio siglo empleando las técnicas que se iniciaron en Italia. Con las aportaciones propias y métodos desarrollados por ellos, consiguen pasar a lienzos, con el más exigente rigor, frescos que situados en principio en los muros interiores de humildes y perdidas iglesias radicadas en los montes pirenaicos corrían gran peligro de perderse.

Por otra parte, y merced a estas inteligentes restauraciones, pueden exponerse en lugares fácilmente visibles por los amantes del arte.

Si todos conocemos la grandeza del Pantocrator de San Clemente de Tahuel, los mejores aromas de la pintura románica catalana suelen encontrarse en lugares que a primera vista parecen de una importancia más secundaria en donde los artistas podían permitirse más libertades interpretativas y marcar su trazo más enérgico.

Durante los siglos XIV y XV, el banquero Datini de Toscana fundó filiales en Florencia, Pisa, Aviñón, Barcelona, Valencia, Palma de Mallorca.

Las filiales estaban administradas por empleados que trabajaban por un sueldo fijo y tenían autoridad delegada: se llamaban "factores". Pero cuando llegaron tiempos difíciles, este sistema favoreció algunos casos de quiebra.

Así, Datini, los Médicis y otros bancos adoptaron un sistema por el que las oficinas filiales en el exterior fueron administradas por socios del negocio que no percibían un sueldo seguro y a cambio tenían participación en los beneficios de la filial que tenían a su cargo.

Datini fue un gran precursor de la banca internacional, y se distinguió por su labor filantrópica, hasta el punto de que a su muerte legó la mayor parte de sus bienes y su propio palacio a una fundación de tipo caritativo "Ceppo di Poveri", que creó, y que todavía hoy sigue funcionando.

– **Retículo distributivo y complementario.**

Es aquel que cumple todas las propiedades citadas anteriormente y es el que en definitiva genera una estructura de Algebra de Boole.

NOTA.—No es imprescindible que la estructura de retículo se manifieste en un conjunto de las partes.

Ej.: En el conjunto $A = \{1, 2\}$ se definen las operaciones internas $*$ y $\perp$ por las siguientes tablas:

$*$	1	2
1	1	2
2	2	2

$\perp$	1	2
1	1	1
2	1	2

Comprobar que es un retículo.

Pasemos pues a comprobar las propiedades:

– **Asociativa:** La comprobaremos para cada ley.

$$\underbrace{1 * \underbrace{(2 * 1)}_{2}}_{2} = \underbrace{\underbrace{(1 * 2)}_{2} * 1}_{2} \quad \text{SI} \qquad \underbrace{1 \perp \underbrace{(2 \perp 1)}_{1}}_{1} = \underbrace{\underbrace{(1 \perp 2)}_{1} \perp 1}_{1} \quad \text{SI}$$

– **Conmutativa:** La comprobaremos para cada ley.

$$\underbrace{1 * 2}_{2} = \underbrace{2 * 1}_{2} \quad \text{SI}$$

$$\underbrace{1 \perp 2}_{1} = \underbrace{2 \perp 1}_{1} \quad \text{SI}$$

– **Simplificativa:** La comprobaremos de la ley $*$ respecto a la ley $\perp$ y al revés.

$$\underbrace{1 * \underbrace{(1 \perp 2)}_{1}}_{1} = 1 \quad \text{SI} \qquad \underbrace{1 \perp \underbrace{(1 * 2)}_{2}}_{1} = 1 \quad \text{SI}$$

– **Idempotente.** La comprobaremos para cada ley.

$$\underbrace{1 * 1}_{1} = 1 \qquad \underbrace{1 \perp 1}_{1} = 1$$

SI

$$\underbrace{2 * 2}_{2} = 2 \qquad \underbrace{2 * 2}_{2} = 2$$

SI

Luego el conjunto $(A, *, \perp)$ es un retículo.

TEMA 7

DIVISIBILIDAD

INDICE

1.—INTRODUCCION.
2.—PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD.
3.—NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS.
A.—Números primos.
B.—Números compuestos.
4.—PROPIEDADES DE LOS NUMEROS PRIMOS.
5.—PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMPUESTOS.
6.—CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.
7.—DESCOMPOSICION DE UN NUMERO EN FACTORES PRIMOS.
8.—FORMA DE LOCALIZAR LA CANTIDAD DE DIVISORES DE UN NUMERO.
A.—Suma de los divisores de un número.
B.—Producto de los divisores de un número.
9.—CONDICION GENERAL DE DIVISIBILIDAD.
10.—MAXIMO COMUN DIVISOR.
A.—Por divisiones sucesivas. Algoritmo de Euclides.
B.—Por descomposición en factores primos.
11.—PROPIEDADES DEL MAXIMO COMUN DIVISOR.
12.—MINIMO COMUN MULTIPLO.
13.—PROPIEDADES DEL MINIMO COMUN MULTIPLO.
14.—RELACION ENTRE EL M.C.D. Y EL M.C.M. DE DOS NUMEROS.
15.—PARTICULARIDADES EN LA DIVISIBILIDAD.
A.—Cálculo de dos números con el dato de su suma.
B.—Cálculo de dos números con el dato de su diferencia.
C.—Cálculo de dos números con el dato de su producto.
D.—Cálculo de dos números con el dato de su cociente.
16.—ESTRUCTURA ALGEBRAICA EN LA DIVISIBILIDAD.

TEMA 7

Para construir los famosos cuadrados mágicos hemos de seguir una regla general y ordenada. Como regla principal, el número del centro tendrá que ser siempre 1/3 (un tercio) de las cifras de los sumandos, es decir, si la suma de las líneas horizontales, verticales y diagonales nos tienen que sumar 15, será 5 la cifra del centro. Segunda regla: En los ángulos superiores colocamos los números pares por orden correlativo, de izquierda a derecha y de arriba abajo, el 2-4-6-8. Ya tenemos colocados los números pares que existen del 1 a 9 y un número impar (5), la clave, en el centro.

Tercera regla: No tenemos más que acomodar en las casillas que nos interesa los restantes números impares (1-3-7 y 9) mirando que las sumas horizontales y verticales dé 15, ya que las diagonales las tenemos. Así nos resultará el cuadrado mágico.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Más adelante veremos y estudiaremos el cuadrado mágico del pintor Alberto Durero, que en vez de hacerlo en 9 cuadrados lo realizó en 16.

DIVISIBILIDAD

1.–INTRODUCCION

Vamos a empezar a definir los elementos de los que consta una división cualquiera:

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo (D)} & \text{divisor (d)} \\ \underbrace{\text{resto (r)}} & \text{cociente (c)} \end{array}$$

La comprobación o prueba de que la división está bien hecha es planteando la igualdad:

Dividendo = Divisor · cociente + resto $\qquad D = d \cdot c + r \quad (1)$

De todas formas, debemos de saber que una división se puede realizar por defecto (no superando el penúltimo resto) o por exceso (superando el penúltimo resto). El planteamiento de la igualdad (1) está hecho por defecto. Repitiendo más ampliamente:

División por defecto

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \underbrace{r_d} & c \end{array}$$

$$D = d \cdot c + r_d \quad (2)$$

División por exceso

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \underbrace{r_e} & c + 1 \end{array}$$

$$D = d \cdot (c + 1) - r_e \quad (3)$$

De las igualdades (2) y (3) podemos deducir la siguiente conclusión (4):

$$\left.\begin{array}{l} D = dc + r_d \rightarrow D - dc = r_d \rightarrow D - dc = r_d \\ D = d(c+1) r_e \rightarrow D = dc + d - r_e \rightarrow D - dc = d - r_e \\ r_d + r_e = d \quad (4) \end{array}\right\} \; r_d = d - r_e$$

Es decir, que en cualquier división numérica el resto por defecto más el resto por exceso es igual al divisor.

Ej.: Obsérvese todo lo expuesto al realizar la división 107 : 4.

División por defecto

$$\begin{array}{r|l} 107 & 4 \\ \hline 27 & 26 \\ \underline{3} & \end{array}$$

$$107 = 4 \cdot 26 + 3$$

División por exceso

$$\begin{array}{r|l} 107 & 4 \\ \hline 27 & 27 \\ \underline{3} & \end{array}$$

$$107 = 4 \cdot 27 - 1$$

$$r_d + r_e = d \rightarrow 3 + 1 = 4$$

Después de observar estos conceptos generales de una división, vamos a pasar a tratar el concepto de divisibilidad. Se entiende por divisibilidad al hecho de que una división sea exacta, es decir, que su resto sea cero (obsérvese que la divisibilidad es un caso particular del concepto general de división, y un caso muy importante que merece especial atención):

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline \underline{0} & c \end{array}$$

En este caso concreto el Dividendo, D, recibe también el nombre de múltiplo, d el divisor y c el cociente. Y podemos establecer las siguientes premisas:

D "es divisible por" d
d "es divisor de" D
D "es múltiplo de" d (se expresa simbólicamente: $D = \dot{d}$)

De esta forma, podemos definir los siguientes conceptos:

– **Múltiplo de un número,** es el que contiene a éste una cantidad exacta de veces (8 = 2).

Cualquier número se puede considerar múltiplo de sí mismo.

– **Divisor de un número,** es el que divide a éste de forma exacta (el 3 es divisor del 27).

Cualquier divisor se puede considerar divisor de sí mismo.

La unidad es divisor de todos los números.

Téngase en cuenta que múltiplo y divisor son dos conceptos iguales expresados al revés uno respecto del otro.

Ej.: Múltiplos de 2 pueden ser el 2, 4, 8, ...

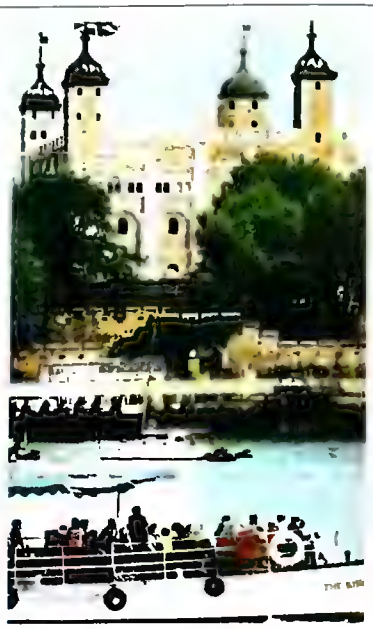
$$\dot{2} = 2, 4, 8, \ldots$$

2.–PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD

La suma de dos múltiplos de un mismo número es otro múltiplo del mismo número.

La diferencia de dos múltiplos de un mismo número es otro múltiplo del mismo número.

El producto de dos múltiplos de un mismo número es otro múltiplo del mismo número.



En Inglaterra, el préstamo de dinero por personas o entidades privadas estaba rigurosamente prohibido y todo el movimiento de dinero estaba sometido al Banco del Rey y al control de los cambistas oficiales, cuyo jefe, el cambista real, tenía su sede en la Torre de Londres, con oficinas en las ciudades más importantes del país.

Sin embargo, la nueva burguesía salida del comercio de la lana, los campesinos terratenientes y los artesanos, germen de las grandes industrias, necesitaban libertad en el movimiento del dinero. Por otra parte, la posterior desamortización dejó libres grandes extensiones de tierra y puso en circulación grandes sumas de dinero, obtenidas por la venta de éstas, lo que determinó por fin la apertura de la banca privada que poco a poco fue estableciéndose y tomando forma hasta crear los grandes bancos que hoy existen.

BEETHOVEN

Su conducta exterior era contradictoria. No permitía que nadie tocara su habitación, de modo que en ella todo estaba en el más espantoso desorden: papeles tirados sobre las sillas y el suelo, tinta volcada sobre el piano y el suelo, restos de comida en platos debajo de los papeles.

Era tan distraído que solía olvidarse de comer y una vez que se encontraba en plena fiebre de inspiración fue a un restaurante, se sentó y olvidando de pedir la comida estuvo meditando largo rato hasta que por fin pidió la cuenta.

Se quejaba constantemente de que no se reconocía su mérito y de no tener dinero suficiente para vivir. En realidad era enormemente famoso y respetado y sus ingresos eran mayores de los que él mismo reconocía. A su muerte se halló en un cajón de su casa una considerable suma de dinero.

d) Cualquier número entero que divide a otro, divide también a todos sus múltiplos.

e) Si un número entero a divide a otros dos D y d, divide también a los restos por defecto y por exceso de la división D : d.

f) Si un número entero a divide a otro D, pero no a un tercero d, tampoco divide a la suma de estos D + d y el resto de dividir esta suma entre **a** es el mismo resto que resulta de dividir el sumando no divisible d entre **a**.

3.–NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

A. –Número primo es aquel que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Cuando queramos formar una tabla de números primos. inferiores a uno dado n, se utiliza el procedimiento de la "criba de Eratóstenes" que se realiza de la siguiente forma:

– Se escriben el 1 y el 2 seguidos de todos los números impares, excluyendo los pares múltiplos de 2.

– Se escribe el 3 y a partir del 21 se tachan todos sus múltiplos impares (los pares ya no están), que consistirá en ir tachando de tres en tres.

– Continuamos con el 5 y a partir de él, tachamos todos los que queden acabados en 5, que consistirá en ir tachando de cinco en cinco.

– Continuamos de la forma expuesta hasta que ya no se puedan tachar más números.

A continuación se citan los números primos menores de 500.

1	2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53	59
61	67	71	73	79	83	89	97	101
103	107	109	113	127	131	137	139	149
151	157	163	167	173	179	181	191	193
197	199	211	223	227	229	233	239	241
251	257	263	269	271	277	281	283	293
307	311	313	317	331	337	347	349	353
359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499			

A título informativo comentaremos que no se conocen todos los números primos que puedan existir. De hecho, existe un récord mundial de número primo, cifrado hasta ahora en el número $2^{21701} - 1$, descubierto por Laura Nickel y Curt Noll de California (EE.UU). El descubrimiento llevo 440 horas de computadora y posee 6533 cifras (datos según la revista Computer-World).

B. –Número compuesto es aquel que no es primo, es decir, que además de tener por divisores él mismo y la unidad, posee otros divisores. Ej.: 4, 18, 35, ...

BEETHOVEN

Su conducta exterior era contradictoria. No permitía que nadie tocara su habitación, de modo que en ella todo estaba en el más espantoso desorden: papeles tirados sobre las sillas y el suelo, tinta volcada sobre el piano y el suelo, restos de comida en platos debajo de los papeles.

Era tan distraído que solía olvidarse de comer y una vez que se encontraba en plena fiebre de inspiración fue a un restaurante, se sentó y olvidando de pedir la comida estuvo meditando largo rato hasta que por fin pidió la cuenta.

Se quejaba constantemente de que no se reconocía su mérito y de no tener dinero suficiente para vivir. En realidad era enormemente famoso y respetado y sus ingresos eran mayores de los que él mismo reconocía. A su muerte se halló en un cajón de su casa una considerable suma de dinero.

d) Cualquier número entero que divide a otro, divide también a todos sus múltiplos.

e) Si un número entero a divide a otros dos D y d, divide también a los restos por defecto y por exceso de la división D : d.

f) Si un número entero **a** divide a otro D, pero no a un tercero d, tampoco divide a la suma de estos D + d y el resto de dividir esta suma entre **a** es el mismo resto que resulta de dividir el sumando no divisible d entre **a.**

3.–NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

A.–Número primo es aquel que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Cuando queramos formar una tabla de números primos, inferiores a uno dado n, se utiliza el procedimiento de la "criba de Erastóstenes", que se realiza de la siguiente forma:

– Se escriben el 1 y el 2 seguidos de todos los números impares, excluyendo los pares múltiplos de 2.

– Se escribe el 3 y a partir del 21 se tachan todos sus múltiplos impares (los pares ya no están), que consistirá en ir tachando de tres en tres.

– Continuamos con el 5 y a partir de él, tachamos todos los que queden acabados en 5, que consistirá en ir tachando de cinco en cinco.

– Continuamos de la forma expuesta hasta que ya no se puedan tachar más números.

A continuación se citan los números primos menores de 500.

1	2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53	59
61	67	71	73	79	83	89	97	101
103	107	109	113	127	131	137	139	149
151	157	163	167	173	179	181	191	193
197	199	211	223	227	229	233	239	241
251	257	263	269	271	277	281	283	293
307	311	313	317	331	337	347	349	353
359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499			

A título informativo comentaremos que no se conocen todos los números primos que puedan existir. De hecho, existe un récord mundial de número primo, cifrado hasta ahora en el número $2^{21701} - 1$, descubierto por Laura Nickel y Curt Noll de California (EE.UU). El descubrimiento llevo 440 horas de computadora y posee 6533 cifras (datos según la revista Computer-World).

B. –Numero compuesto es aquel que no es primo, es decir, que además de tener por divisores él mismo y la unidad, posee otros divisores. Ej.: 4, 18, 35, ...

4.–PROPIEDADES DE LOS NUMEROS PRIMOS

a) Dos números son primos entre sí cuando no admiten más divisor común que la unidad. Ej.: 3 y 7.

Debe tenerse en cuenta que dos números pueden ser primos entre sí y sin embargo cada uno de ellos independientemente no tiene por qué ser primo. Ej.: 6 y 35.

b) Dos números consecutivos son siempre primos entre sí. Ej.: 16 y 17.

c) La serie de los números primos es ilimitada.

d) Cuando dos números compuestos son primos entre sí, cualquier divisor de uno de ellos es primo con el otro número.

e) Si dos números son primos entre sí, cualquier potencia de los dos dan como resultado números primos entre sí.

5.–PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMPUESTOS

a) El menor divisor de un número compuesto es siempre primo (excluido el uno, que es divisor de cualquier número) y su cuadrado es siempre inferior o igual al número en cuestión.

6.–CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

– Un número es **divisible por 2** cuando termina en cero o en cifra par. Ej.: 30, 82.

– Un número es **divisible por 3** cuando la suma de sus cifras es divisible por 3. Ej.: 741.

– Un número es **divisible por 4** cuando la suma de sus cifras de las unidades más el duplo de las decenas sea divisible por 4. Ej.: 192.

– Un número es **divisible por 5** cuando termina en cero o en cinco. Ej.: 200 y 285.

– Un número es **divisible por 6** cuando la suma de la cifra de las unidades más el cuadruplo de la suma del resto de las cifras sea divisible por 6. O también cuando sea divisible simultáneamente por 2 y 3 ($6 = 2 \cdot 3$). Ej.: 150.

– Un número es **divisible por 7** cuando la suma de los productos de sus cifras significativas multiplicadas por los coeficientes periódicos 1, 3, 2, –1, –3, –2, ... en este orden y empezando por las unidades es divisible por 7. Muchas veces es más conveniente comprobar efectuando la división directamente. Ej.: 910.

– Un número es **divisible por 11** cuando la suma de las cifras que ocupan lugar impar (unidad, centena...) menos la suma de las cifras que ocupan lugar par (decena, millar...) sea 0,11 o divisible por 11. Ej.: 121.

– Un número es **divisible por 25** cuando el número formado por las dos últimas cifras es divisible por 25. Ej.: 675.

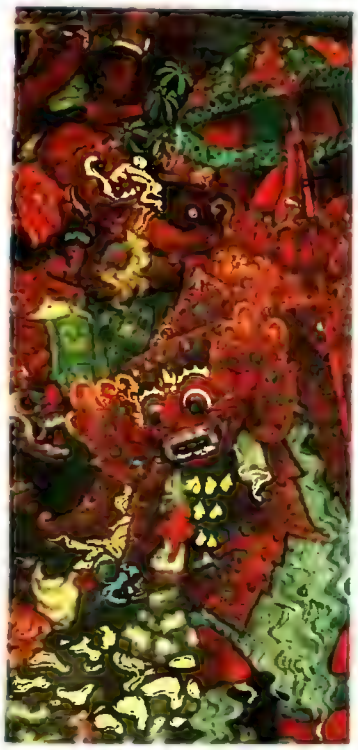
Hay que hacer notar que se pueden citar criterios de divisibilidad para todos los números; sin embargo, dada su complejidad la

PARENTESCO

He contraído matrimonio con una viuda que tenía una hija ya en edad de contraer matrimonio. Mi padre, que nos visitaba a menudo, se enamoró de mi hijastra y contrajo matrimonio con ella, de manera que mi esposa quedó siendo suegra de su suegro y mi padre hijastro.

Tiempo después, mi madrastra, hija de mi esposa, tuvo un hijo, que quedó siendo hermano mio, por ser hijo de mi padre, y mi nieto por ser hijo de la hija de mi esposa, y por lo tanto yo abuelo de mi hermano.

Más tarde, mi esposa tuvo también un hijo, por lo que mi suegra es hermana de mi hijo y también su abuela, porque él es hijo de su hijastro. Mi padre es cuñado de mi hijo, porque la hermana de él es su esposa; yo soy hermano de mi propio hijo, que también es hijo de mi abuela. Soy cuñado de mi madrastra; mi esposa es tía de su propio hijo, mi hijo es sobrino de mi padre y yo abuelo de mí mismo.



Un día del año 2136 antes de J.C., un dragón intentó devorar el Sol provocando el terror del emperador de China y de su pueblo. El astro fue desapareciendo poco a poco hasta quedar un extraño círculo de luz blanca alrededor del negro espacio donde antes estaba situado el brillante astro.

Los chinos, atemorizados por la actitud del dragón, empezaron a correr de un lado a otro, mientras le gritaban y desafiaban, a la vez que hacían sonar sus curiosos instrumentos de madera. Al fin, el dragón, aturdido, abandonó su presa sin acabar de devorarla.

El Sol se había salvado, pero el emperador, cuyo susto se convirtió en indignación, mandó decapitar a los astrónomos imperiales, Hsi y Ho por no haberle informado anticipadamente de la llegada del dragón.

Durante mucho tiempo posteriores astrónomos sonrieron al leer el siguiente epitafio anónimo:

"Aquí yacen Hsi y Ho, cuyo triste destino no es extraño. Fueron muertos porque no anunciaron el eclipse traidor".

mayoría de las veces resulta más sencillo comprobar efectuando la división directamente.

Ej.: Del número 3991680 podemos deducir que:

– Es divisible por 2, porque termina en 0.

– Es divisible por 3, porque $3 + 9 + 9 + 1 + 6 + 8 + 0 = 36 = \dot{3}$.

– Es divisible por 4, porque $0 + 2 \cdot 8 = 16 = \dot{4}$.

– Es divisible por 5, porque termina en 0.

– Es divisible por 6, porque $0 + 4\,(8 + 6 + 1 + 9 + 9 + 3) = 144 = \dot{6}$.

– Es divisible por 7, porque $0\,(1) + 8\,(3) + 6\,(2) + 1\,(-1) + 9\,(-3) + 9\,(-2) + 3\,(1) = -7 = \dot{7}$.

– Es divisible por 9, porque $3 + 9 + 9 + 1 + 6 + 8 + 0 = 36 = \dot{9}$.

– Es divisible por 11, porque $(0 + 6 + 9 + 3) - (8 + 1 + 9) = 0 = \dot{11}$.

Ej.: Determinar la cifra x del número 123x45, sabiendo que es divisible por 7:

Para que el número 123x45 sea divisible por 7, debe ocurrir que:

$$5\,(1) + 4\,(3) + x\,(2) + 3\,(-1) + 2\,(-3) + 1\,(-2) = \dot{7}$$
$$5 + 12 + 2x - 3 - 6 - 2 = \dot{7}$$
$$6 + 2x = \dot{7}$$

Como las cifras posibles son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le vamos dando valores a x, hasta que encontremos uno, tal que la suma $6 + 2x$ sea múltiplo de 7.

Esto ocurre para $x = 4$, en que $6 + 2 \cdot 4 = \dot{7}$, $x = 4$.

7.–DESCOMPOSICION DE UN NUMERO EN FACTORES PRIMOS

El problema consiste en descomponer un número dado en un producto de números tales que sean todos primos.

Para ello se comienza dividiendo el número dado entre un divisor de éste que sea primo y así sucesivamente hasta llegar a un cociente que sea primo, al cual sea posible dividirle por él mismo y obtener como último cociente a la unidad, con lo que daremos por finalizado el proceso.

Ej.: Descomponer en factores primos el número 360.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Ej.: Descomponer en factores primos el número 2202200.

2202200	2
1101100	2
550550	2
275275	5
55055	5
11011	7
1573	11
143	11
13	13
1	

$$2202200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13$$

NOTA.—Al descomponer un número en factores primos, no es necesario que los divisores primos del número sigan un orden creciente, se puede empezar la descomposición por cualquiera de ellos, al final aparecerán todos los que son.

8.—FORMA DE LOCALIZAR LA CANTIDAD DE DIVISORES DE UN NUMERO

Primeramente se descompone el número en cuestión en factores primos y a continuación se le suma a cada exponente de la descomposición una unidad; estas sumas se multiplican entre sí y el resultado es la cantidad de divisores del número.

Sea el número N descompuesto en factores primos:

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot \ldots$$

La cantidad de divisores que tiene son:

$$\text{número divisores} = (\alpha + 1)\,(\beta + 1)\,(\gamma + 1)\,\ldots$$

Ej.: Hallar la cantidad de divisores del número 600.

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

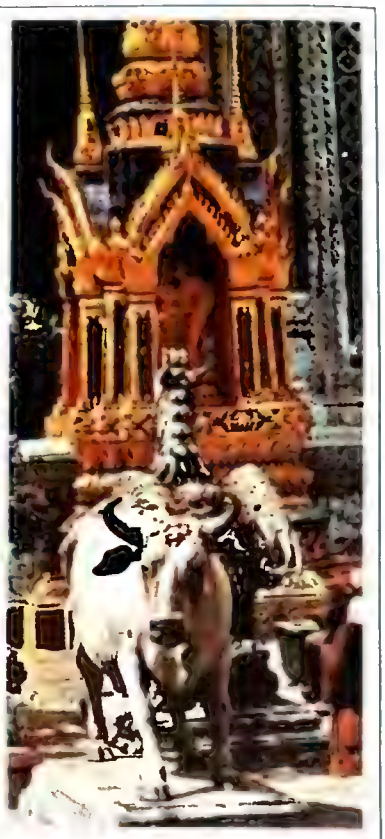
$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{número divisores} = (3 + 1)\,(1 + 1)\,(2 + 1) = 24 \text{ divisores}$$

NOTA.—Téngase en cuenta que los divisores que se obtienen son los positivos o los negativos. Considerando los positivos y negativos conjuntamente existirán el doble de los que obtenemos por la fórmula. (En el ejemplo anterior entre divisores positivos y negativos son 48.)

Pues bien, sabiendo cómo se calcula la cantidad de divisores, vamos a esbozar una forma de obtener cuáles son estos divisores.

Para ello escribiremos todos los divisores de cada una de las potencias resultantes de la descomposición en factores primos, y cada uno de estos divisores y todos los posibles resultados de



Asia es un continente maravilloso en el que se dan los mayores contrastes, las civilizaciones más antiguas, y las más grandes religiones tuvieron su origen en él.

Los estudiosos dudan si el primer hombre se originó también allí. Actualmente es el continente más poblado; más de la mitad de la población mundial vive allí.

Su territorio ocupa la tercera parte del planeta; en él están los puntos más altos y más bajos. Las temperaturas también son extremas; algunos puntos alcanzan temperaturas inferiores a las del mismo polo Norte y muchas de sus ciudades son los puntos más calurosos de la tierra. Posee asimismo zonas de poblada vegetación, inmensas praderas y grandes desiertos.

El templo principal de la diócesis donde tiene su cátedra el obispo o el arzobispo, es la llamada catedral. Modestas iglesias en un principio, fueron siendo cada vez edificios más importantes, llegando a la magnificencia de las grandes catedrales góticas, en las que los constructores calcularon esbeltas estructuras de piedra que permiten paredes con grandes vanos ocupados por maravillosas vidrieras que facilitan la entrada a raudales de luz multicolor.

En la catedral gótica todo estaba calculado en base a la armonía, el trazado de las naves en sí, la bella composición de las fachadas y las torres. El predominio de los vanos sobre los macizos da toda su esbeltez y ligereza a las catedrales de este estilo.

Las principales son: la de Reims, Amiens, Chartres, Colonia, Milán, París, Viena, Florencia; y en España, León, Burgos, Tarragona, Toledo, Sevilla y Oviedo.

combinar entre sí estos divisores junto con la unidad nos reproducirán la totalidad de los divisores del número en cuestión.

Ej.: Del ejemplo anterior la cantidad de divisores de $N = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ es:

$$1$$
$$(I)\ 2,\ 2^2,\ 2^3$$
$$(II)\ 3$$
$$(III)\ 5,\ 5^2$$

Multiplicando entre sí I y II: 6, 12, 24.

Multiplicando entre sí II y III: 15, 75.

Multiplicando entre sí I y III: 10, 50, 20, 100, 40, 200.

Multiplicando entre sí I, II y III: 30, 150, 60, 300, 120, 600.

Ordenando y considerando los divisores positivos y negativos obtenemos el conjunto:

$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm25, \pm30, \pm40, \pm50, \pm60, \pm75, \pm100, \pm120, \pm150, \pm200, \pm300, \pm600\}$

Vamos a estudiar a continuación las operaciones que nos pueden surgir con estos divisores:

A.—Suma de los divisores de un número

Consiste en hallar la suma de todos los divisores de un número $N = a^\alpha \cdot b^\nu \cdot c^\nu \cdot \ldots$

Su cálculo se efectúa mediante la fórmula:

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\nu+1}-1}{c-1}$$

Ej.: Calcular la suma de los divisores de 504.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

$$S = \frac{2^{3+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{2+1}-1}{3-1} \cdot \frac{7^{1+1}-1}{7-1} = 15 \cdot 13 \cdot 8 = 1560$$

B.—Producto de los divisores de un número

Consiste en hallar el producto de todos los divisores de un número $N = a^\alpha b^\beta c^\nu \ldots$

Su cálculo se efectúa mediante la fórmula:

$$P = \sqrt{N^{\text{número divisores de N}}}$$

Ej.: Calcular el producto de los divisores de 200.

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$$200 = 2^3 \cdot 5^2$$

$$P = \sqrt{200^{(3+1)(2+1)}} = \sqrt{200^{12}} = 200^6$$

9.–CONDICION GENERAL DE DIVISIBILIDAD

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por otro es que el primero contenga todos los factores primos del segundo, con sus exponentes iguales o mayores.

10.–MAXIMO COMUN DIVISOR

Cualquier número posee como mínimo dos divisores que son: el mismo y la unidad.

Si el número es primo, no tiene nada más que esos dos, pero si no es primo tendrá más divisores.

Si comparamos dos o más números entre sí, puede que éstos tengan divisores comunes. Pues bien, si de estos divisores comunes a varios números elegimos el mayor, éste será su máximo común divisor, y lo representaremos como M.C.D. o como m.c.d.

De esta forma, entenderemos por m.c.d. de varios números al mayor divisor común a los números en cuestión.

NOTA.–Si varios números no tienen divisores comunes, su m.c.d. es naturalmente la unidad.

Vamos a estudiar seguidamente las formas de calcular el m.c.d. de varios números:

A.–Por divisiones sucesivas. Algoritmo de Euclides

Este procedimiento se utiliza generalmente cuando los números en cuestión son grandes y por lo tanto poseen una cantidad elevada de divisores. Se procede de la siguiente forma:

– En el caso de dos números se divide el mayor entre el menor; si el resto fuese cero, el menor de ellos es el m.c.d. Si el resto no fuese cero, se divide el menor de los números por este resto, a continuación el primer resto por el segundo y así sucesivamente hasta encontrar una división exacta. El último divisor empleado que hace la división exacta es el m.c.d.

Vivimos en una época en la que necesariamente y para desarrollar cualquier trabajo o actividad tenemos que utilizar máquinas o instrumentos.

La diferencia entre uno y otro consiste en el hecho de que una máquina no necesita el empleo de fuerza humana, al contrario de lo que sucede con los instrumentos.

Las máquinas se han desarrollado de forma espectacular. El ingenio del hombre y sus conocimientos las hace cada vez más perfectas.

Hoy existen algunas que con una adecuada programación eliminan la intervención del hombre y realizan operaciones mecánicas delicadas y complejas, con una rapidez que no tiene comparación con el rendimiento de los obreros más especializados y experimentados. Estos robots son los últimos hijos de las máquinas pensantes, equipadas con microprocesadores.

Parry fue un gran explorador inglés, excelente marino y matemático. Hizo varios viajes en busca del paso del Noroeste, pensando que por el Norte de América estarían unidos los océanos Atlántico y Pacífico. Si bien en ninguno encontró el deseado paso, adquirió gran experiencia en la vida sobre el hielo, observando las costumbres de los esquimales y su utilización de los trineos de perros.

Además, Parry supo organizar de tal manera las invernadas cuando sus barcos quedaban atrapados por el hielo que eliminó prácticamente las enfermedades y el desánimo de las tripulaciones.

Para lo primero, la enfermedad del escorbuto, tan corriente en su época, llevó grandes cantidades de verduras y frutas, cultivando algunos vegetales a bordo.

Para lo segundo, organizó diversiones y ejercicios que entretenían a los hombres.

Estos sistemas revolucionaron la técnica de las expediciones polares. En 1827 realizó un viaje al norte de las Spitsberg, para encontrar un mar libre de hielo, que según las leyendas existía permanentemente en aquella zona. Demostró prácticamente que este mar no existía.

— En el caso de que sean varios los números, se halla el m.c.d. de dos de ellos y a continuación se halla el m.c.d. del resultado obtenido y cualquier otro de los números en cuestión y así sucesivamente hasta utilizar todos los números. El m.c.d. del último par utilizado es el pedido.

Ej.: Calcular el m.c.d. de 5340 y 4242.

$$\begin{array}{r|l} 5340 & 4242 \\ 1098 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4242 & 1098 \\ 0948 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1098 & 948 \\ 150 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 948 & 150 \\ 048 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 48 \\ 06 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 6 \\ 0 & 8 \end{array}$$

$$\text{m.c.d. } (5340, 4242) = 6$$

obsérvese que cada división tiene por dividendo al divisor de la división anterior y por divisor alresto de la división anterior.

NOTA.—Al utilizar el algoritmo de Euclides para calcualr el m.c.d. es frecuente disponer los ca.lculos anteriores según el siguiente esquema:

COCIENTES		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
DIVISORES	a	b	r_1	r_2	r_3	r_4
RESTOS	r_1	r_2	r_3	r_4	0	

m.c.d. (a, b) = r_4

En el ejemplo anterior:

	1	3	1	6	3	8
5340	4242	1098	948	150	48	6
1098	948	150	48	6	0	

m.c.d. (5340, 4242) = 6

Ej.: Hallar el m.c.d. de 25020, 29700 y 6930.

Elegimos dos números cualesquiera: 2520 y 29700 y hallamos su m.c.d.

$$\begin{array}{r|l} 29700 & 2520 \\ 04500 & 11 \\ 1980 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2520 & 1980 \\ 0540 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1980 & 540 \\ 360 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 540 & 360 \\ 180 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 180 \\ 000 & 2 \end{array}$$

así que el m.c.d. (2520, 29700) = 180.

Pues bien, ahora hallamos el m.c.d. del obtenido 180 y del otro número que queda, el 6930.

$$\begin{array}{r|l} 6930 & 180 \\ 1530 & 38 \\ 090 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 90 \\ 00 & 2 \end{array}$$

m.c.d. (180, 6930) = 90

Luego definitivamente: m.c.d. (2520, 29700, 6930) = 90

B.—Por descomposición en factores primos

Este procedimiento se utiliza generalmente cuando los números en cuestión son pequeños.

Para su cálculo, se descomponen los números en factores primos y de estas descomposiciones se eligen los factores comunes a los números que tengan el menor exponente.

Ej.: Hallar el m.c.d. de 36 y 54.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$54 = 2 \cdot 3^3$

m.c.d. $(36, 54) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

11.—PROPIEDADES DEL MAXIMO COMUN DIVISOR

a) Si dos números cualquiera se multiplican o dividen por un mismo número, su m.c.d. queda multiplicado o dividido respectivamente por dicho número.

b) Si un número divide a un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, seguro que divide al otro.

c) Los divisores comunes de dos números son los divisores de su m.c.d.

d) Los cocientes de dividir dos números por su m.c.d. son primos entre sí. Propiedad de gran importancia y que utilizaremos posteriormente.

Ej.: Al dividir los números 1630 y 2460 por **a** se obtienen los restos 18 y 16. Determinar el mayor valor de **a**.

Inicialmente debemos de pensar en encajar el problema dentro de la divisibilidad (ya que la divisibilidad utiliza divisiones exactas). Es obvio que si a cada uno de los números le restamos su resto la división por **a** será exacta, con lo que cada número resultante deberá ser múltiplo de **a**.

$1630 - 18 = 1612 = a$

$2460 - 16 = 2444 = a$

Ahora bien, como **a** debe ser el mayor divisor de 1612 y 2444, **a** deberá de ser el m.c.d. (1612, 2444):

1612	2
806	2
403	13
31	31
1	

$1612 = 2^2 \cdot 13 \cdot 31$

2444	2
1222	2
611	13
47	47
1	

$2444 = 2^2 \cdot 13 \cdot 47$

$a = \text{m.c.d.}\ (1612, 2444) = 2^2 \cdot 13 = 52 \quad ; \quad a = 52$

EL FERETRO DE MAHOMA

El profeta Mahoma, fundador del Islam, fue sepultado en un ataúd de hierro en la ciudad de Medina (Arabia Saudita).

Cuenta la leyenda que dicho ataúd está en el aire, ya que la tierra no es digna de albergar a una persona tan santa como fue el enviado de Alá. Los peregrinos musulmanes acuden continuamente a la ciudad de Medina para adorar al profeta.

Este milagro está relacionado con las fuerzas magnéticas, ya que el techo del sepulcro contiene una gran piedra de "magnetita", que es precisamente la que sostiene en vilo el ataúd. Su fuerza es tal, que aunque levante un poco del suelo el ataúd de hierro, es suficiente para reconocer este milagro.

Esto no destruye totalmente el milagro, ya que Alá (se dice) ha concedido a la "magnetita" poderes ocultos para hacer cumplir su voluntad.

Todos los animales que actualmente pueblan nuestro planeta son el producto de una evolución constante y el resultado de una terrible lucha por sobrevivir. En realidad casi no se parecen en nada a los que determinaron su origen. No obstante, hay varias especies que continúan viviendo a través de millones de años, sin cambios importantes.

Entre éstos, los más importantes y conocidos son: la tortuga, que no ha sufrido variaciones esenciales en 275 millones de años; el cocodrilo, que existe desde hace 200 millones de años, conservando sus características actuales; el okapí, especie de mamífero muy protegida en Africa, que mide 1,60 m de altura, de la familia de la jirafa, color pardo oscuro y con líneas blancas en las patas, que no ha evolucionado en los últimos 30 millones de años; la língula, animal marino del género de los branqueópodos inarticulados, de forma alargada y aplastada con bordes laterales paralelos y concha equivalva, del que se han encontrado fósiles de hace 500 millones de años, exactos a los que viven hoy en día.

12.–MINIMO COMUN MULTIPLO

Cualquier número posee infinitos múltiplos.

Si comparamos dos números cualquiera, ocurre que los múltiplos de ambos también son infinitos.

Pues bien, de los infinitos múltiplos comunes a varios números nos interesa conocer particularmente el menor de ellos, que es precisamente su **mínimo común múltiplo** y lo representaremos por **M.C.M. o m.c.m.**

De esta forma entenderemos por m.c.m. de varios números al **menor dividendo común** a los números en cuestión.

Vamos a estudiar seguidamente la forma de calcular el m.c.m. de varios números.

Inicialmente descomponemos los números en cuestión en factores primos y de estas descomposiciones elegimos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ej.: Hallar el m.c.m. de 378, 468 y 1176.

378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

468	2
234	2
117	3
39	3
13	13
1	

1176	2
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \quad 468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \quad 1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$

m.c.m. $(378, 468, 1176) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 13 = 137592.$

13.–PROPIEDADES DEL MINIMO COMUN MULTIPLO

a) Si cualquiera de los números en cuestión es múltiplo de los demás, él es el m.c.m. de todos.

b) Si los números en cuestión son primos entre sí, el producto de todos es su m.c.m.

c) Cualquier múltiplo del m.c.m. es también un múltiplo común.

d) Si los números en cuestión se multiplican o dividen por un mismo número, su m.c.m. queda multiplicado o dividido respectivamente por dicho número.

e) Si se divide al m.c.m. de varios números por cada uno de ellos, sus cocientes son primos entre sí.

Ej.: Hallar el menor número que al dividirlo por 12 y 42 dé resto igual a 5. Para encajar el problema dentro de la divisibilidad, vamos a suponer que el resto de la división no es 5, sino 0.

De esta forma el menor número que dividido por 12 y 42 da de resto 0 es el m.c.m. (12, 42):

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{m.c.m. } (12, 42) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

Ahora bien, como realmente debe de dar 5 de resto al dividirlo por 12 y 42, el número pedido N es:

$$N = 84 + 5 = 89$$

Ej.: Tres barcos zarpan de un puerto cada 10, 12 y 20 días.

Si zarparon juntos el 1 de julio, cuándo volverán a hacerlo de nuevo.

Téngase en cuenta que cada vez que zarpen juntos habrán hecho cada uno una cantidad exacta de viajes, si quisiéramos averiguar la cantidad de viajes que ha hecho cada uno en ese transcurso de tiempo, tendríamos que dividir el tiempo que tardan en zarpar juntos, entre los días que cada uno zarpa del puerto. Pues bien, no hay duda que el tiempo que tardan en zarpar juntos debe ser un múltiplo común de 10, 12 y 20 y además el menor múltiplo, ya que hay que localizar cuándo zarpan juntos la primera vez después del 1 de julio, así que la solución es el m.c.m. (10, 12, 20):

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 10 = 2 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 20 = 2^2 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m. } (10, 12, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ días}$$

Volverán a zarpar juntos el 30 de agosto.

Ej.: En un cuartel hay menos de 500 soldados. Sabiendo que se pueden formar grupos de 16, 20 y 25 soldados, sin que sobre ninguno, cuál es el número exacto de ellos.

Si tuviéramos la cantidad de soldados, al dividirlos por 16, 20 y 25 deberíamos obtener la cantidad de grupos que hay de cada uno. No hay duda entonces que la cantidad de soldados debe ser un múltiplo común de 16, 20 y 25, vamos, pues, a hallar su menor múltiplo, es decir el m.c.m. (16, 20, 25). De esta forma puede ocurrir que el m.c.m. (16, 20, 25) sea mayor de 500 (el problema no tendría solución) o menor de 500 (el problema tendría solución y estudiaremos cuántas, ya que podría ocurrir que hubiese algún múltiplo mayor que el m.c.m. y menor de 500):

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 16 = 2^4 \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 25 = 5^2$$

$$\text{m.c.m. } (16, 20, 25) = 2^4 \cdot 5^2 = 400 \text{ soldados}$$

Ej.: Determinar el número de divisores de 10.800 que tengan simultáneamente los divisores 45 y 600.

El ajedrez fue descubierto en Persia por Sissa. Cuando el rey le dijo que por descubrir tan maravilloso juego le pidiera lo que quisiera, le contestó Sissa:

La 1.ª casilla como obsequio.
La 2.ª casilla 1 grano de trigo
La 3.ª casilla 2 granos de trigo
La 4.ª casilla 4 granos de trigo
La 5.ª casilla 8 granos de trigo

Al rey de Persia, además de satisfacerle el precio, se rió de él diciéndole que había pedido poco. Veámoslo.

Lo que pidió Sissa era una progresión geométrica razón 2, cuyo primer término es 1 y el último es 64. La suma de los términos es $2^{64} - 1$, o sea: 18.445.815.160.671.830.015 (¡ya respiro!), o sea, la friolera cifra de más de 18 trillones de granos de trigo. En diez años de buena cosecha en Persia no habla trigo suficiente para pagar a Sissa.

En 1801, el astrónomo Piazzi descubrió uno de los planetas menores, o asteroides, al que puso el nombre de "Ceres". Pero, al poco tiempo, desapareció dicho planeta cerca del Sol. Este hecho revolucionó a Europa entera. Se hicieron montones de conjeturas: que si se lo había tragado el Sol, que si debido a su proximidad lo había fundido, etc. Todos los astrónomos estaban alarmados ante esta situación.

Comenzó Gauss a realizar cálculos y al cabo de un mes ofreció una predicción de la órbita de Ceres. Al poco tiempo, cuando apareció el planeta al otro lado del Sol, los astrónomos lo encontraron casi en el lugar que había predicho Gauss. Al poco tiempo, y por esta circunstancia, le ofrecieron la dirección del observatorio astronómico de Gotinga.

Si 45 y 600 deben ser divisores de los números a localizar, éstos deberán ser múltiplos de 45 y 600. Vamos, pues, a hallar el menor múltiplo de 45 y 600 que es el m.c.m. (45, 600):

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 45 = 3^2 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{m.c.m. } (45, 600) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

Teniendo el menor múltiplo de 45 y 600, obtendremos los restantes, comparando las descomposiciones en factores primos de $10800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ y de $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Téngase en cuenta que no podemos sobrepasar 10800 ni ponernos por debajo del 1800. Así que manejando dentro de estos límites los exponentes de ambos números, lograremos obtener las soluciones:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800 \qquad 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 5400$$
$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600 \qquad 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 10800$$

Ej.: En un mecanismo de relojería hay dos ruedas dentadas: La rueda A tiene 30 dientes e impulsa a la rueda B de 36 dientes. Cada vez que el primer diente de la rueda A coincide con el primer diente de la rueda B se produce un impulso mecánico, mediante un artificio. Hallar el número de vueltas que debe dar la rueda A para que vuelva a producirse un nuevo impulso.

Pensemos que cuando vuelvan a coincidir los primeros dientes de cada rueda es que cada una de éstas ha dado un número de vueltas exacto, es decir, que existirá una cantidad exacta de veces los 30 dientes de la rueda A y los 36 dientes de la rueda B, luego tendremos que localizar un número que sea múltiplo de 30 y 36 y además debe ser el menor múltiplo común, ya que dice que cuando se vuelve a producir el siguiente impulso, y este número es el m.c.m. (30, 36):

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 30 = 2^2 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\text{m.c.m. } (30, 36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Como hemos dicho, el 180 contiene al 30 y al 36 una cantidad exacta de veces, así que para hallar el número de vueltas que ha dado la rueda A dividiremos el 180 entre los dientes que tiene cada vuelta de A, que será la solución:

$$\frac{180}{30} = 6 \text{ vueltas}$$

Ej.: En una fábrica se quiere diseñar una caja para embalar varias unidades de una determinada mercancía. Como se da al precio del transporte una gran importancia, se pretende utilizar al máximo la capacidad de carga, en peso, que tienen los dos tipos de camiones, A y B, que la empresa va a dedicar exclusivamente al transporte de este producto. El camión de tipo A es capaz de llevar una carga de 162.000 unidades de mercancía; el de tipo B es capaz de transportar 148.500 unidades de mercancía. Se estima, además, que las cajas útiles y manejables puedan contener desde 250 unidades, como mínimo, a 300 unidades como máximo. Hallar cuántas unidades de dicho acabado contendrán las cajas más aconsejables.

Es evidente que cada caja contiene un número exacto de unidades y en consecuencia cada camión deberá de llevar un número exacto de unidades al llevar un número exacto de cajas. Así pues, el número de unidades de cada caja deberá ser cualquier divisor común de 162000 y 148500 comprendido entre 250 y 300.

Efectuando descomposiciones en factores primos:

$$162000 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3^4$$
$$148500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^3 \cdot 11$$
$$250 = 2 \cdot 5^3$$
$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Observamos que 250 y 300 son divisores de 162000 y 148500 por tener todos sus factores primos comunes con exponentes iguales o menores que los de 162000 y 148500. Ahora nos queda averiguar si existen más divisores de 162000 y 148500 comprendidos entre 250 y 300, y simplemente con manejar los exponentes de las descomposiciones de 162000 y 148500 obtenemos también $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$, ya que los divisores comunes de 162000 y 148500 deberán ser de la forma:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \ (x = 0, 1 \text{ ó } 2 \quad ; \quad y = 0, 1 \text{ ó } 2 \quad ; \quad z = 0, 1, 2 \text{ ó } 3)$$

luego las cajas deberán contener 250, 270 ó 300 unidades.

14.–RELACION ENTRE EL M.C.D. Y EL M.C.M. DE DOS NUMEROS

Dados dos números a y b, llamaremos:

$$\text{m.c.d.}\ (a, b) = D$$
$$\text{m.c.m.}\ (a, b) = M$$

Se verifica siempre que el producto de dos números es igual al producto de su m.c.d. por su m.c.m.:

$$a \cdot b = D \cdot M$$

De donde podemos deducir despejando que:

$$D = \frac{a \cdot b}{M} \qquad \text{ó} \qquad M = \frac{a \cdot b}{D}$$

Francia rivalizó con Italia en los estudios matemáticos aplicados a los usos comerciales.

Sobre el siglo XIV Dubois estudió el problema de la depreciación y la inflación de moneda.

En esta época el valor de la moneda se modificaba a cada momento y según el criterio y el deseo de los gobernantes.

Oresmes insistió en que el valor de la moneda tenía que ser un medio de cambio aceptado popularmente y en el cual cada pieza tuviese su propio valor mercantil y mantuviese un valor que podía fluctuar con arreglo a las necesidades del mercado, pero no por capricho de una persona, llegando los gobernantes de esa época y como consecuencia de estas quejas a dictar una ordenanza garantizando el valor estable de la moneda durante toda una generación.

Quizá sea el atletismo una de las modalidades deportivas más puras que existen. A través del atletismo queremos llegar al "Límite Humano" como muralla imposible de franquear. Este límite humano parece que a través de técnicas, disciplina y experiencias anteriores se va superando de año en año, ya que si somos un poquito curiosos y observadores y vemos las marcas mundiales olímpicas de hace varios años, vemos que todas y casi sin excepción se van superando. Un segundo, un centímetro o un gramo, ha sido muchas veces un límite muy difícil de conseguir.

El atletismo da elasticidad a nuestros músculos, aumenta la capecidad de nuestros pulmones, da potencia al organismo en general.

En el atletismo de agilidad (carreras, saltos, etc.); en el atletismo de fuerza (lanzamientos, pugilismo, etc.), tenemos que tener muy en cuenta nuestra propia constitución.

No queremos, en modo alguno, tratar en esta observación el atletismo olímpico. Existen otras personas más preparadas que nosotros para hacer esto; lo único que queremos indicar aquí es la conveniencia de hacer deporte, pero solamente para personas de 3 a 100 años. Volvemos a repetir que de 3 a 100 años. Conviene decir que si usted no está incluido en esta edad se abstenga de hacer deporte, ya que puede perjudicarle.

Relaciones que podemos considerar de gran importancia, debido a su aplicación a la resolución de problemas.

Ej.: El m.c.d. de 20 y 30 es 10. Hallar su m.c.m.:

$$20 \cdot 30 = 10 \cdot M \quad ; \quad M = \frac{20 \cdot 30}{10} = 60 \quad ; \quad M = 60$$

15.–PARTICULARIDADES EN LA DIVISIBILIDAD

Son frecuentes los problemas en los que se pide calcular los números conociendo D o M y alguna relación entre ellos, como pueda ser su suma, su diferencia, su producto, su cociente...

Todo este tipo de problemas se resuelven aplicando dos propiedades que ya se han enunciado anteriormente, y que volvemos a repetir de nuevo.

– El producto de dos números es igual al producto de su m.c.d. por su m.c.m.

$$a \quad b = M \cdot D$$

– Los cocientes de dividir los números en cuestión por su m.c.d. son primos entre sí.

$$\frac{a}{D} = c \rightarrow a = D \cdot c$$

$$\frac{b}{D} = c' \rightarrow b = D \cdot c'$$

NOTA.–Obsérvese posteriormente que en los tipos de problemas en los que sea necesario aplicar cualquiera de estas dos condiciones o combinar las dos de forma simultánea, el objetivo de cálculo irá dirigido fundamentalmente a localizar los cocientes c y c'.

Vamos, pues, a estudiar detalladamente algunas de las relaciones más frecuentes que se pueden plantear.

A.–Cálculo de dos números a y b

Cuando nos dan la **suma** de los números y D.

Expresamos los dos números en función de D y de c y c' y sumamos las dos igualdades miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} a = D \cdot c \\ b = D \cdot c' \\ \hline a + b = Dc + Dc' \end{array} \qquad a + b = D \cdot (c + c')$$

Con lo que relacionamos los datos a + b y D con la suma c + c', cuyos componentes deben ser primos entre sí. Localizados c y c' podemos calcular inmediatamente a y b por las relaciones primitivas:

$$\frac{a + b}{D} = c + c'$$

Ej.: Hallar dos números sabiendo que su suma es 140 y su m.c.d. es 28.

$$\frac{a+b}{D}=c+c' \quad ; \quad \frac{140}{28}=c+c' \quad ; \quad c+c'=5$$

Luego si la suma c + c' es 5, tendremos que descomponer el 5 en dos números primos entre sí.

Las posibilidades son entonces:

$$\begin{cases} c = 2 \\ c' = 3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= D \cdot c = 28 \cdot 2 = 56 \\ b &= D \cdot c' = 28 \cdot 3 = 84 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ c' = 4 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= D \cdot c = 28 \cdot 1 = 28 \\ b &= D \cdot c' = 28 \cdot 4 = 112 \end{aligned}$$

Obsérvese que en cada una de las dos soluciones c y c' son primos entre si (no admiten más divisores comunes que la unidad) y suman 5.

Ej.: Hallar dos números sabiendo que su suma es 240 y su m.c.m. 1768.

Inicialmente podemos plantear una de las condiciones:

$$a + b = D\,(c + c') \qquad (1)$$

La otra condición necesaria la obtenemos de sustituir

$$a = Dc \text{ y } b = Dc' \text{ en } D \cdot M = a\,b$$
$$D \cdot M = Dc \cdot Dc' \quad ; \quad M = D \cdot c \cdot c' \qquad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro las condiciones (1) y (2), obtenemos la relación (3) que se manifiesta con los datos que nos dan en el problema y las incógnitas de cálculo c y c':

$$\frac{a+b}{M}=\frac{D\,(c+c')}{dcc'} \quad ; \quad \frac{a+b}{M}=\frac{c+c'}{cc'} \qquad (3)$$

Así pues, sustituyendo en (3) obtenemos:

$$\frac{240}{1768}=\frac{c+c'}{cc'}$$

En donde es necesario como en todos estos problemas donde intervengan c y c' hacer irreducible la fracción 240/1768, obteniendo

$$\frac{30}{221}=\frac{c+c'}{cc'} \qquad \left.\begin{aligned} c + c' &= 30 \\ c \cdot c' &= 221 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Resolviendo a continuación el sistema de ecuaciones que se forma:

$$c' = 30 - c \quad ; \quad c\,(30 - c) = 221 \quad ; \quad 30c - c^2 = 221$$

$$c^2 - 30c + 221 = 0 \quad ; \quad c=\frac{30 \pm \sqrt{900-884}}{2}=\frac{30 \pm 4}{2}=\begin{cases} 17 \\ 13 \end{cases}$$

La civilización del siglo XX no se concibe sin el uso intensivo de las matemáticas. Nadie extiende un cheque ni revisa su cuenta corriente sin utilizar la misma aritmética inventada por los mesopotamios e hindúes. Nadie construye edificios sin emplear las técnicas elementales que ya descubrieron los geómetras egipcios. Los primitivos griegos ya intuyeron que la tierra necesariamente tendría forma de esfera.

Las matemáticas clásicas y su uso favorecieron el espíritu aventurero de la época de los descubrimientos. Colón fue un enamorado de las matemáticas, aplicadas a la astrología y a la geografía conocida en su época.

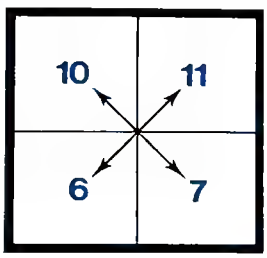
Más adelante, los hombres que iniciaron la revolución industrial aplicaron, para construir sus máquinas, los principios y las investigaciones de Galileo, Newton y otros muchos, hasta la investigación atómica, que descansa en la teoría de la Relatividad de Einstein. Grandes matemáticos son los que hoy en día ayudan a calcular las conquistas espaciales.

CUADRADO MAGICO DE ALBERTO DURERO

Anteriormente vimos los cuadrados mágicos realizados en 9 casillas. Alberto Durero, el pintor y geómetra, lo realizó en 16 cuadredos.

La suma de horizontales, verticales y diagonales era 34.

Al ser número par de cuadrados, no existía un número solo en el centro de la figura sino cuatro números en cuatro cuadrados, pero diagonalmente (sólo diagonalmente sumaba la mitad de 34, o sea, 17). Así pues tenemos el centro del cuadrado, o sea:



Ya tenemos el centro de la figura. Ahora, como hicimos en el anterior, busquemos los ángulos exteriores superior e inferior y que nos sumen también entre los cuatro, 34; operemos como si estos cuatro números del centro de la figura fueran sólo uno y que sea precisamente el 17 (mitad de 34). En el vértice superior izquierdo puso el número inmediatamente inferior al 17, o sea, el 16, y en el cuadrado de enfrente el número que le falta para sumar 17, o sea, el 1. Así, ya tenemos una diagonal completa.

Los otros dos números, del vértice superior derecho e inferior izquierdo, puso 13 y 4 (17), y ya tenemos:

16			13
	10	11	
	6	7	
4			1

Luego las soluciones del sistema (4) son:

$$\text{Para } c = 17 : c' = 13$$
$$\text{Para } c = 13 : c' = 17$$

Como salen invertidas las soluciones elegimos cualquiera de ellas: $c = 17$ y $c' = 13$.

Teniendo c y c', podemos calcular los números pedidos a y b, previo cálculo del m.c.d. = D.

De la condición (2) obtenemos D.

$$D = \frac{M}{cc'} \quad ; \quad D = \frac{1768}{17 \cdot 13} = \frac{1768}{221} = 8$$

Así que definitivamente:

$$\begin{cases} a = Dc = 8 \cdot 17 = 136 \\ b = Dc' = 8 \cdot 13 = 104 \end{cases}$$

Los números que nos pedían son el 136 y el 104.

3.—Cálculo de dos números a y b cuando nos dan la diferencia de los números y D

Expresamos los dos números en función de D, c y c', y restamos las dos igualdades miembro a miembro:

$$\begin{array}{l} a = D \cdot c \\ b = D \cdot c' \\ \hline a - b = Dc - Dc' \rightarrow a - b = D \cdot (c - c') \end{array}$$

Con lo que relacionamos los datos a − b y D con la diferencia c − c', cuyos componentes deben de ser primos entre sí. Localizados c y c' podemos calcular inmediatamente a y b por las relaciones primitivas:

$$\frac{a - b}{D} = c - c'$$

Ej.: La diferencia de dos números es 10 y su m.c.d. es 10. Calcular los dos números.

$$\frac{a - b}{D} = c - c' \rightarrow \frac{10}{10} = c - c' \rightarrow c - c' = 1$$

Luego si la diferencia c − c' es 1, tendremos que localizar dos números primos entre sí, cuya diferencia sea 1. Si nos detenemos a pensar, observamos que pueden existir infinitos c y c' primos entre sí, cuya diferencia sea 1. Vamos a obtener, pues, tres soluciones de las infinitas que pueden existir:

$$\begin{cases} c = 2 \\ c' = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = D \cdot c = 10 \cdot 2 = 20 \\ b = D \cdot c' = 10 \cdot 1 = 10 \end{array}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ c' = 2 \end{cases} \qquad a = D \cdot c = 10 \cdot 3 = 30 \qquad b = D \cdot c' = 10 \cdot 2 = 20$$

$$\begin{cases} c = 5 \\ c' = 4 \\ \vdots \end{cases} \qquad a = D \cdot c = 10 \cdot 5 = 50 \qquad b = D \cdot c' = 10 \cdot 4 = 40 \qquad \vdots$$

C.—Cálculo de dos números a y b cuando nos dan el producto de los números y D

Expresamos los dos números en función de D, c y c' y multiplicamos las dos igualdades miembro a miembro:

$$\begin{array}{l} a = D \cdot c \\ b = D \cdot c' \\ \hline ab = Dc \cdot Dc' \rightarrow ab = D^2 \cdot cc' \rightarrow \dfrac{ab}{D^2} = cc' \end{array}$$

Se puede seguir transformando sustituyendo $a \cdot b = D \cdot M$:

$$\frac{D \cdot M}{D^2} = c \cdot c' \rightarrow \frac{M}{D} = c \cdot c'$$

Con lo que relacionamos los datos ab, D y M con el producto c · c', cuyos componentes deben de ser primos entre sí. Localizados c y c', podemos calcular inmediatamente a y b por las relaciones primitivas.

Ej.: El producto de dos números es 10800 y su m.c.d. es 60. Calcular los números.

$$\frac{ab}{D^2} = c \cdot c' \quad ; \quad \frac{10800}{60^2} = c \cdot c' \quad ; \quad cc' = 3$$

Luego si el producto c · c' es 3, tendremos que localizar dos números primos entre sí, cuyo producto sea 3:

$$\begin{cases} c = 3 \\ c' = 1 \end{cases} \qquad a = D \cdot c = 60 \cdot 3 = 180 \qquad b = D \cdot c' = 60 \cdot 1 = 60$$

Ej : Hallar dos partes de 1904, tal que el m.c.d. sea 28 y el m.c.m. sea 32340.

Comenzaremos planteando el problema, llamando a y b a las dos partes de 1904.

Como en todos los problemas de este tipo, el objetivo es calcular c y c'. Es evidente que la primera condición es que la suma de las dos partes debe ser 1904 (teniendo en cuenta el subapartado A):

$$\frac{a + b}{D} = c + c' \rightarrow \frac{1904}{28} = c + c' \rightarrow c + c' = 68$$

La otra condición entre c y c' es relacionarlos con su m.c.d. y su m.c.m. (teniendo en cuenta el subapartado C):

$$\frac{M}{D} = c \cdot c' \rightarrow \frac{32340}{28} = c \cdot c' \rightarrow c \cdot c' = 1155$$

Los números que faltan en las horizontales inferior y superior puso los números inmediatamente inferiores a 16 (en la de abajo) e inmediatamente superiores a 1 (en la de arriba), es decir, 3-2 y 15-14 y tenemos:

16	3	2	13
	10	11	
	6	7	
4	15	14	1

Ya sólo nos faltan 4 casillas y que no se repiten los números, o sea, los números 12-5-9 y 8. Como quiera que se observan, en cada diagonal y horizontal que hemos sacado hay dos números pares y dos impares; entonces en la primera columna ya tenemos el 16 y el 4 (pares); de los números que nos faltan (12, 5, 9 y 8) tomaremos los impares, o sea, el 9 y el 5. Si el 9 lo ponemos arriba, tendremos que la segunda fila horizontal sería 9 + 10 + 11 = 30, y le tendríamos que sumar 4 para que diera 34, pero como el 4 ya lo tenemos (y no podemos repetir ninguno), el de arriba tendrá que ser el 5 y el de abajo el 9, y así, los otros dos que faltan (8 y 12) ya salen rápidamente haciendo las sumas. El cuadrado mágico es el siguiente:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Inevitablemente el lenguaje de las matemáticas ha pasado a representar una forma de expresar conceptos mucho más difíciles que muchas de las lenguas habladas en la actualidad.

Los niños actuales, depositarios del futuro, tienen la oportunidad de familiarizarse con él.

Los dos pilares de las matemáticas antiguas fueron el uso de los números y la geometría, iencia de las formas. Los árabes ampliaron la aritmética con el uso del álgebra, que incluye notaciones de cantidades desconocidas.

En el siglo XVII se unificaron aritmética, álgebra y geometría, en la geometría analítica, que representa los números como puntos, convirtiendo las ecuaciones en formas geométricas, y éstas en ecuaciones.

La aproximación analítica de esta nueva geometría, aclarando una rama de las matemáticas en función de otra, despejó el camino a las matemáticas superiores.

Después del análisis fue el cálculo un sistema para analizar el cambio y el movimiento en función de puntos o números por una sucesión continua. Esto permite solucionar problemas de dinámica, comprender la trayectoria de una estrella errante y calcular asimismo eutomóviles y naves espaciales.

A continuación dividimos miembro a miembro las dos condiciones planteadas:

$$\frac{c + c'}{c \cdot c'} = \frac{68}{1155}$$

y observamos que la fracción 68/1155 es irreductible, si no lo fuese, habría que hacerla irreducible para poder plantear el sistema siguiente; identificando numeradores y denominadores de la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} c + c' = 68 \\ c \cdot c' = 1155 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c' = 68 - c \\ c\,(68 - c) = 1155 \end{array} \quad ; \quad 68c - c^2 = 1155$$

$$c^2 - 68c + 1155 = 0 \; ; \; c = \frac{68 \pm \sqrt{4624 - 4620}}{2} = \frac{68 \pm 2}{2} = \begin{cases} 35 \\ 33 \end{cases}$$

De esta forma, las soluciones del sistema son:

$$\begin{array}{lll} \text{para } c = 35 & ; & c' = 33 \\ \text{para } c = 33 & ; & c' = 35 \end{array}$$

Como cada pareja de soluciones salen iguales, aunque cambiadas, elegimos como solución definitiva del sistema: $c = 35$ y $c' = 33$.

Pasamos a calcular los números en cuestión:

$$\begin{cases} a = D \cdot c = 28 \cdot 35 = 980 \\ b = D \cdot c' = 28 \cdot 33 = 924 \end{cases}$$

D.—Cálculo de dos números a y b cuando nos dan el cociente de los números y D

Expresamos los dos números en función de D, c y c' y dividimos las dos igualdades miembro a miembro:

$$\begin{array}{l} a = D \cdot c \\ b = D \cdot c' \\ \hline \dfrac{a}{b} = \dfrac{D \cdot c}{Dc'} \rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{c'} \end{array}$$

De esta forma relacionamos el dato $\frac{a}{b}$ con el cociente $\frac{c}{c'}$, cuyos componentes deben ser primos entre sí.

Ej.: Hallar dos números cuyo cociente es igual a 33/21 y su m.c.d. es 90.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{33}{21} = \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{c}{c'} = \frac{11}{7}$$

Téngase en cuenta que hay que hacer irreducible la fracción 33/21 para poder identificar numeradores y denominadores de la igualdad obtenida. De esta forma: $c = 11$ y $c' = 7$.

Pasamos a calcular los números:

$$\begin{cases} a = D \cdot c = 90 \cdot 11 = 990 \\ b = D \cdot c' = 90 \cdot 7 = 630 \end{cases}$$

NOTA.—Para cualquier otra relación que nos den, entre cualesquiera dos números que nos pidan calcular, partiremos generalmente siempre de las igualdades primitivas $a = Dc$; $b = Dc'$ y $D \cdot M = ab$, en este tipo de problemas.

16.—ESTRUCTURA ALGEBRAICA EN LA DIVISIBILIDAD

Ya se ha visto que el M.C.D. de dos números a y b es otro número D, y el M.C.M. de dos números a y b es otro número M.

De lo que deducimos que tanto el M.C.D. como el M.C.M son leyes de composición interna en el conjunto Z de los números enteros, ya que utilizando elementos de Z obtenemos siempre elementos de Z.

EL CREADOR DE MILAGROS

Kokichi Mikimoto fue hasta los 33 años un humilde vendedor de ovejas marinas, langostas y caracoles secos marinos. Pero un día que estaba en Yokohama viendo una exposición de productos marinos vio que vendían unas perlas diminutas a precios exorbitantes. Al lado de los vendedores había otra persona que explicaba cómo se originaban las perlas. Se introducía en la ostra un fragmento de materia extraña que la irritaba; para protegerse la ostra derrama lágrimas de carbonato cálcico en miles de finas capas que se endurecen. A Mikimoto se le ocurrió una idea inmediatamente. ¿Por qué no obligar a la ostra a producir perlas? Así pues se dirigió a la bahía de Ago, recogió ostras, las abrió unos milímetros e introdujo entre ellas y la concha un grano de arena. Al cabo de varia semanas había diseminado por el agua unas 10.000 ostras preparadas. Pero unos meses después, al sacarlas, no encontró ni la más diminuta perla.

Volvió a comenzar de nuevo. Insertaba cuentas de arcilla, trozos de nácar, vidrio, cobre o parafina; unas veces lo colocaba cerca de la articulación de la concha, otras en el borde exterior o bien en el revestimiento interior y las sumergió a diferentes temperaturas y profundidades.

Al cabo de dos años no había obtenido ni el menor resultado. Al tercer año irrumpió en la bahía una multitud de plancton que mató a todas las madres excepto a las de una pequeña ensenada. Desalentado, abrió todas las ostras muertas sin resultados positivos. Pero el 11 de Julio de 1893 encontró una perla y así con las otras de la ensenada. Mikimoto patentó su procedimiento y se dispuso a cultivarlas a gran escala.

Su primera cosecha fue pobre, pero la segunda fue impresionante. En Abril de 1901 Komatsu causó sensación cuando al asistir a la coronación de Eduardo VII le ofreció una selección de perlas de Mikimoto.

Los habitantes de un bonito pueblo situado a la orilla de un lago, decidieron erigir un monumento en honor de un gran hombre nacido allí.

Cuando el escultor finalizó su obra, recibió la visita de un amigo que le dijo:

—Ha quedado muy bien, y además es maciza. ¿Cuánto pesará?

—Es imposible saberlo con precisión —contestó el escultor—. Aquí la mayor báscula es la del molinero que no pesa más de 100 Kg.

Después de reflexionar un momento, su amigo dijo:

—¿Qué te apuestas a que puedo averiguar su peso exacto?

—Imposible —repuso el escultor—. ¿Cómo vas a hacerlo?

—Pesaré el monumento en la báscula del molinero. Me ayudará el lago —añadió.

Al día siguiente, el joven ganó la apuesta. ¿Cómo?

El joven hizo que cargaran la estatua en una barca de remos. Al sumergirse el bote bajo el peso de la obra, trazó una raya a lo largo del nivel donde llegaba el agua. A continuación descargó la estatua y llenó la barca con piedras hasta que el agua llegó a la línea. El peso total de las piedras equivalía por tanto al de la estatua. Luego amontonó las piedras y las pesó en pequeñas cantidades en la báscula del molinero. Al sumar las pesadas individuales obtuvo el peso de la estatua.

Es obvio que estas leyes de composición interna cumplen las propiedades:

— **Asociativa:**

$$a \ D \ (b \ D \ c) = (a \ D b) \ D \ c$$
$$a \ M \ (b \ M \ c) = (a \ M \ b) \ M \ c$$

— **Conmutativa:**

$$a \ D \ b = b \ D \ a$$
$$a \ M \ b = b \ M \ a$$

— **Idempotente:**

$$a \ D \ a = a$$
$$a \ M \ a = a$$

— **Simplificativa o absorción:**

$$(a \ D \ b) \ M \ a = a$$
$$(a \ M \ b) \ D \ a = a$$

— **Distributiva:**

$$a \ D \ (b \ M \ c) = (a \ D \ b) \ M \ (a \ D \ c)$$
$$a \ M \ (b \ D \ c) = (a \ M \ b) \ D \ (a \ M \ c)$$

De lo que deducimos que el conjunto Z con las operaciones D y M es un retículo distributivo.

NOTA.—La comprobación de las propiedades es de simple razonamiento.

TEMA 8

CONGRUENCIAS NUMERICAS

INDICE

1.—INTRODUCCION.
   A.—Primera definición.
   B.—Segunda definición.
2.—PROPIEDADES DE LOS NUMEROS CONGRUENTES.
3.—OPERACIONES CON CONGRUENCIAS.
4.—CONSECUENCIAS DE UNA CONGRUENCIA.
   A.—Relación de equivalencia en Z.
   B.—Estructura algebraica en Z.
5.—NUMEROS INCONGRUENTES. SISTEMAS COMPLETOS.
6.—RESTOS POTENCIALES.
7.—CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD. APLICACIONES.
   A.—Teorema fundamental.
   B.—Consecuencias del teorema fundamental.

TEMA 8

Los azulejos llamados "de Oficios" fueron muy populares en España en los siglos XVI al XVIII. Los ponían en el dintel de sus talleres los artesanos y servían para adornar y para identificar el trabajo que allí se realizaba. Estos azulejos son una especialidad de la loza fabricada en todo el levante; especialmente en la zona catalana representan actividades realizadas en un arte plenamente popular, de dibujo sencillo pero encantador por su grafismo al alcance de todas las inteligencias.

CONGRUENCIAS NUMERICAS

1.–INTRODUCCION

El contenido de este tema, aunque posee un desarrollo general, en cierto modo lo podemos considerar como una prolongación de la Divisibilidad, ya que guarda íntima relación con ésta.

Volvemos de nuevo a estudiar el concepto de división desde un punto de vista más general y completo, es decir, desde una óptica de consecuencias.

A.–Cualquier congruencia se puede definir de dos formas, que son equivalentes

Diremos que dos números enteros positivos o negativos a y b (pertenecientes al conjunto Z) son congruentes respecto de otro número entero positivo m (perteneciente al conjunto N) cuando al dividir a y b por m se reproduce el mismo resto.

Diremos así que a y b son congruentes respecto del módulo m y escribiremos:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Ej.: $7 \equiv 10 \pmod{3}$, ya que al dividir 7 entre 3 y 10 entre 3, las divisiones nos reproducen el mismo resto.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \underbrace{1} & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \underbrace{1} & 3 \end{array} \rightarrow 7 \equiv 10 \pmod{3}$$

Ej.: $15 \equiv -8 \pmod{4}$. Al dividir 16 y -8 entre 4, obtenemos el mismo resto:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 4 \\ \underbrace{0} & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -8 & 4 \\ \underbrace{0} & -2 \end{array} \rightarrow 16 \equiv -8 \pmod{4}$$

B.—También podemos plantear el concepto de congruencia desde otro punto de vista que es consecuencia del anterior. Es decir, que dos números a y b son congruentes también respecto a otro número o módulo m cuando la diferencia de los dos números es múltiplo del módulo m.

Podemos esbozar una sencilla justificación:

$$\begin{array}{r|l} a & m \\ r & q \end{array} \rightarrow \quad a = mq + r$$

$$\begin{array}{r|l} b & m \\ r & q' \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} b = mq' + r \\ \hline a - b = mq - mq' \end{array} \quad ; \quad a - b = m\,(q - q') = mK = \dot{m}$$

$$a - b = \dot{m}$$

Para la demostración hemos seguido el siguiente camino: Hemos dividido a y b entre el módulo m, y partiendo de la base de que a y b deben de ser congruentes, sus restos deben de ser idénticos (no así sus cocientes q y q'). A cada división le hemos aplicado la prueba y las dos igualdades obtenidas las restamos miembro a miembro, obteniendo $a - b = m\,(q - q')$, donde $q - q'$ será un número cualquiera K, de tal forma que mK deberá ser múltiplo de m.

Ej.: Averiguar si 6 es congruente con 2 respecto del módulo 4. Haciendo la comprobación por el concepto del apartado A:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \smile 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \smile 2 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow 6 \equiv 2 \text{ (mod. 4)}$$

Haciendo la comprobación por el concepto del apartado B:

$$6 - 2 = 4 = \dot{4} \rightarrow 6 \equiv 2 \text{ (mod. 4)}$$

Ej.: Considerando el año 1981 de 365 días, donde el día 1 de Enero cae en Jueves, el 2 en Viernes, el 3 en Sábado, y así sucesivamente hasta completar una semana. Averiguar en qué día de la semana cae el día 138 del año.

Para ello basta dividir por 7 (días de una semana) el número 138 y observar cuál es el resto obtenido de la división y confrontar con la numeración inicial del año, ya que los días de cada semana del año deben ser congruentes.

$$\begin{array}{r|l} 138 & 7 \\ 68 & 19 \\ \smile 5 & \end{array}$$

El resto 5 coincide con el Lunes, luego el día 138 del año cae en Lunes.

NOTA.—Cuando dos números a y b no dan el mismo resto al dividirlos por otro m, se dice que no son congruentes, es decir, son incongruentes y escribiremos $a \not\equiv b$ (mod. m).

Ej.: $7 \not\equiv 10$ (mod. 2).

Los icebergs del Atlántico fueron, hasta la invención del radar, un peligrosísimo obstáculo para la navegación por la zona norte de este océano.

Los icebergs fueron un reto para el deseo de cálculo que siempre tuvo el hombre. Al estar sumergida la mayor parte de su volumen debido a su densidad ligeramente más baja que la del agua, la parte flotante que vemos es aproximadamente una quinta parte de su volumen total.

Pueden alcanzar proporciones enormes, incluso kilómetros de largo y cientos de metros de altura.

Transportados por corrientes marítimas frías y procedentes de las regiones polares, flotan libremente hasta alcanzar zonas marinas de aguas templadas donde los rayos del Sol y el calor del agua acaba derritiéndolos.

Algunos estudiosos ya vieron en la antigüedad las grandes posibilidades de los mecanismos. Tuvieron ideas, crearon sistemas mecánicos, pero la mayor parte de las veces no pudieron pasar del terreno teórico al práctico por falta de materiales adecuados o desconocimiento de la forma de emplearlos.

Por otra parte, en el mundo antiguo se disponía de mano de obra muy barata; existían gran número de esclavos que podían realizar cualquier labor.

Así, muchos mecanismos, bese de máquinas utilizadas hoy día, nacieron como juego y sirvieron para entretenimiento de los potentados de la época. El más extraordinario creador de mecanismos fue Leonardo Da Vinci. Entre sus planos existían proyectos muy dasarrollados de grúas, aparatos voladores, helicópteros, etc., que no pudo realizar este genio por falta de materiales y tecnología adecuados.

2.–PROPIEDADES DE LOS NUMEROS CONGRUENTES

a) Cualquier número es congruente con él mismo, respecto de cualquier módulo.

b) Son congruentes con cero, respecto de un módulo m, todos los múltiplos de m.

c) Cuando un número a es primo con un módulo m, cualquier número b congruente con a debe ser primo con m.

d) El dividendo y el resto de cualquier división son congruentes respecto del divisor.

3.–OPERACIONES CON CONGRUENCIAS

a) Si sumamos o restamos miembro a miembro varias congruencias respecto a un mismo módulo m, resulta otra congruencia respecto al mismo módulo m.

Ej.:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 3 \pmod 2 \\ 5 &\equiv 7 \pmod 2 \\ -9 &\equiv 11 \pmod 2 \end{aligned}$$

b) A los dos miembros de cualquier congruencia se les puede sumar o restar un mismo número resultando otra congruencia respecto del mismo módulo.

Ej.:

$$6 \equiv 10 \pmod 4 \rightarrow 6 + 2 \equiv 10 + 2 \pmod 4$$

c) Si multiplicamos miembro a miembro varias congruencias respecto a un mismo módulo m, resulta otra congruencia respecto al mismo módulo m.

Ej.:

$$\begin{aligned} 5 &\equiv 8 \pmod 3 \\ 3 &\equiv 6 \pmod 3 \\ \hline 15 &\equiv 48 \pmod 3 \end{aligned}$$

d) A los dos miembros de cualquier congruencia se les puede multiplicar por un mismo número, resultando otra congruencia respecto del mismo módulo.

Ej.:

$$5 \equiv 10 \pmod 5 \rightarrow 5 \cdot 2 \equiv 10 \cdot 2 \pmod 5$$

e) Se pueden dividir dos congruencias $ap \equiv bp$ y $p \equiv q$ respecto de un módulo m, cuando p, q y m sean primos entre sí, resultando otra congruencia del mismo módulo.

Ej.: En las congruencias $4 \cdot 5 \equiv 6 \cdot 7 \pmod 2$ y $5 \equiv 7 \pmod 2$, 5, 7 y 2 son primos entre sí, luego los podemos dividir obteniendo otra congruencia del mismo módulo.

$$4 \equiv 6 \pmod 2$$

f) Si dividimos dos números congruentes respecto de un módulo m, por un divisor común que sea primo con m, obtenemos dos cocientes que son congruentes respecto del mismo módulo.

Ej.: Si $15 \equiv 9$ (mod. 2), observamos que 3 es un divisor común de 15 y 9 y además primo con el módulo 2, pues los cocientes de dividir 15 y 9 entre 3 serán congruentes respecto del módulo 2.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \underline{0} & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \underline{0} & 3 \end{array} \qquad 5 \equiv 3 \text{ (mod. 2)}$$

g) A los dos miembros de una congruencia respecto de un módulo m los podemos dividir por cualquier divisor común x de ambos, siempre que dividamos su módulo entre el m.c.d. de m y x.

Ej.: Si $20 \equiv 60$ (mod. 4), un divisor común de 20 y 60 es 2, luego dividiendo la congruencia por 2 tendremos que dividir también el módulo entre el m.c.d. (4, 2) = 2. Resultando:

$$10 \equiv 30 \text{ (mod. 2)}$$

h) Si elevamos a una misma potencia los dos miembros de una congruencia respecto a un módulo m, resulta otra congruencia respecto al mismo módulo m (consecuencia del apartado c).

Ej.:

$$5 \equiv 7 \text{ (mod. 2)}$$
$$5^2 \equiv 7^2 \text{ (mod. 2)}$$

En la región Toscana italiana se encuentra la ciudad de Pisa y allí, junto a su célebre catedral, se levanta bella y arrogante su célebre "Campanile pendenti", torre de mármol blanco de ocho pisos rodeada de esbeltas columnas, de planta circular, construida a partir del año 1175 sobre planos de Bonanno Pisano, y terminada sobre el año 1390.

Desde su terraza superior, y dejando caer objetos diversos, Galileo Galilei consiguió determinar en los primeros años del siglo XVII, y antes que Newton los enunciara de forma definitiva, la ley de la gravedad, que es una de las leyes fundamentales del Universo.

Su peso de 15.000 toneladas y un cedimiento del terreno fueron las causas de su inclinación, 2,26 m. sobre su eje, y con dirección sur, dando un desnivel de 0,70 m. entre la parte norte y sur de la terraza.

La gloria de la torre es estar inclinada, pero los italianos están inquietos. Han calculado que a razón de un milímetro por año la inclinación del edificio aumentará a tal extremo que en 2151 la vertical que pasa por el centro de gravedad caerá fuera del polígono de la base y la célebre torre se derrumbará sobre la verde hierba del prado de los Milagros donde está construida.

Cuando sólo llevaba alzados 3 pisos, la torre comenzó a inclinarse; se suspendieron las obras y tras largas discusiones y otras tantas interrupciones se terminó hacia 1390. El verdadero culpable es el suelo arenoso, pero los viejos pisanos cuentan que el "campanille" nació derecho, proyectando su sombra sobre el baptisterio próximo como un desafío. El sacristán se ofendió y cada mañana se apostaba bajo la torre diciéndole: "Torre, ven un poquito más cerca". Al fin fue escuchado. En 1934 se suprimieron las 7 campanas cuyas vibraciones podían acelerar la inclinación y se introdujeron en los cimientos 982 toneladas de cemento para estabilizar el equilibro de la torre. Pero en 1944 tres bombas caídas en las cercanías agravaron la situación.

4.–CONSECUENCIAS DE UNA CONGRUENCIA

Cuando manejamos congruencias generalmente nos estamos moviendo en el conjunto Z, ya que los datos que utilizamos pertenecen a Z y los resultados que obtenemos también pertenecen al conjunto Z (números enteros positivos y negativos, incluido el cero).

Pues bien, podemos esbozar las siguientes consideraciones:

1.–El clase de equivalencia en Z

Cualquier congruencia es una relación de equivalencia en el conjunto Z.

Cada una de las clases de equivalencia consta de todos los números enteros positivos y negativos, que dan el mismo resto (congruentes entre sí) al dividirlos respecto al módulo m:

$$c(0),\ c(1),\ c(2),\ \ldots\ c(m-1)$$

El conjunto cociente Z/R estará formado por todas las clases de equivalencia definidas anteriormente.

Ej.: En el conjunto Z se define la siguiente relación binaria R: "Dos números cualesquiera dan el mismo resto al dividirlos por 4". Estudiar a R. Téngase en cuenta que la relación binaria R nos la podían también haber definido por $a - b = 4,\ \forall a, b, \in Z$.

Comenzamos a comprobar las propiedades de las relaciones binarias:

– Reflexiva: $a\,R\,b \rightarrow a\,R\,a$.

Si dos elementos a y b de Z dan el mismo resto al dividirlos por 4, cualquiera de ellos a está relacionado consigo mismo por dar el mismo resto al dividirlo por 4. Luego la propiedad se cumple.

– Simétrica: $a\,R\,b \rightarrow b\,R\,a$.

Si dos elementos a y b de Z dan el mismo resto al dividirlos por 4, también darán el mismo resto al dividirlos por 4 si los tratamos al revés b y a.

Luego la propiedad se cumple.

– Transitiva:

$$\left.\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,c \end{matrix}\right\} \rightarrow a\,R\,c$$

Si dos elementos a y b dan el mismo resto al dividirlos por 4 y lo mismo ocurre con b y c, seguro que a y c dan el mismo resto al dividirlos por 4.

Luego la propiedad se cumple.

De esta forma, como vemos que se cumplen la propiedades reflexiva, simetrica y transitiva, la relación R (para mayor infor-

Un profesor les puso a sus tres alumnos Julián, Pablo y José, cierto número de plumas en la cabeza, de tal manera que cada uno veía las de sus compañeros pero no las suyas. Entonces preguntó:

—Julián: ¿Cuántas plumas ves en total en las cabezas de Pablo y José?

—Veo 9 —respondió.

—Pablo: ¿Cuántas ves en las cabezas de Julián y José?

—Veo 8.

—José: ¿Cuántas ves en las cabezas de Julián y Pablo?

—Veo 7 —respondió.

¿Cuántas plumas tiene cada uno en su propia cabeza?

(Solución en le página siguiente).

mación sobre las relaciones binarias, remítase al tema que las trata específicamente) definida es una relación de equivalencia en Z.

Pues bien, si ya hemos visto qué es relación de equivalencia, vamos a pasar a localizar las clases de equivalencia, investigando cada subconjunto de números de Z, que dan el mismo resto al dividirlos por 4.

RESTO 0	RESTO 1	RESTO 2	RESTO 3
0	± 1	± 2	± 3
± 4	± 5	± 6	± 7
± 8	± 9	± 10	± 11
⋮	⋮	⋮	⋮
$\{0, \pm 4, \pm 8, ...\}$	$\{\pm 1, \pm 5, \pm 9, ...\}$	$\{\pm 2, \pm 6, \pm 10, ...\}$	$\{\pm 3, \pm 7, \pm 11, ...\}$
"	"	"	"
c (0)	c (1)	c (2)	c (3)
"	"	"	"
—	—	—	—
0	1	2	3

Luego el conjunto Z/R estará formado por todas las clases de equivalencia anteriores:

$$Z/R = \{\{\pm 0, \pm 4, \pm 8, ...\}\ \{\pm 1, \pm 5, \pm 9, ...\}\ \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, ...\}\ \{\pm 3, \pm 7, \pm 11, ...\}\} = \{c(0), c(1), c(2), c(3)\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

NOTA.—Esta última forma de representar las clases de equivalencia $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, se usa únicamente en relaciones binarias de congruencia, y reciben el nombre específico de clases residuales módulo 4. (En general, clases residuales módulo m.)

Al conjunto cociente Z/R se suele también representar, especificamente para estos casos, como Z/4 ó Z/4Z. (En general, Z/m ó Z/m Z.)

B.—Estructura algebraica de las clases residuales módulo m en Z/m

Si en el conjunto Z/m de las clases residuales módulo m definimos la suma y el producto como leyes de composición interna, consideraremos que todo conjunto Z/m es un anillo conmutativo con elemento unidad.

Además, observaremos en la ley producto que puede ocurrir que sin ser cero dos elementos cualesquiera, del conjunto Z/m, se puede dar el caso de que su producto sea cero, con lo que diremos que los dos elementos son divisores de cero, y el conjunto Z/m conserva la estructura de anillo conmutativo con elemento unidad (esto sucede cuando m no es primo).

Cuando ocurra que el conjunto Z/m no posee divisores de cero, el anillo conmutativo con elemento unidad adquiere la categoría de dominio de integridad (esto sucede cuando m es primo).

SOLUCION

Se puede resolver por el método deductivo, pero aquí vamos a usar el método matemático de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas.

Llamaremos X las plumas que tiene Julián, Y las plumas que tiene Pablo y Z las plumas que tiene José.

De tal manera que:

Julián ve en la cabeza de Pablo "Y", y en la cabeza de José "Z", que son 9 plumas. Ya tenemos la primera ecuación Y + Z = 9 (ecuación n.º 11).

Pablo ve en la cabeza de Julián "X" y en la cabeza de José "Z", que son 8 plumas. X + Z = 8 (ecuación n.º 2).

Por último, José ve en la cabeza de Julián "X" y en la cabeza de Pablo "Y", que son 7 plumas. X + Y = 7 (ecuación n.º 3).

Tomamos las ecuaciones 1.ª y 2.ª y las restamos.

$$Y + Z = 9$$
$$X + Z = 8$$
$$Y - X + 0 = 1$$

ó $Y - X = 1$ ó $-X + Y = 1$

$-X + Y$ será la ecuación n.º 4

Sumando las ecuaciones 3.ª y 4.ª tendremos:

$$X + Y = 7$$
$$-X + Y = 1$$
$$0 + 2Y = 8$$

y $\frac{8}{2} = 4$, o sea Pablo tiene 4 plumas.

Tomando cualquiera de las ecuaciones anteriores donde entre el valor "Y", o sea 4, tendremos:

De la ecuación n.º 1:

Y + Z = 9, o lo que es lo mismo, 4 + Z = 9.

Z = 9 − 4 = 5, por lo tanto José tiene 5 plumas.

De la ecuación n.º 2:

X + Z = 8, o lo que es lo mismo, X + 5 = 8.

X = 8 − 5 = 3, por lo tanto, Julián tiene 3 plumas.

JULIAN ..... 3 plumas
PABLO ..... 4 plumas
JOSE ..... 5 plumas

El último ramal de la cordillera pirenaica en su zona N.O. es el cabo Finisterre, situado en las coordenadas 9° 16' 25" del meridiano de Greenwich, longitud Oeste.

Este punto mítico fue el terror de los antiguos. Allí situaron el fin del mundo (de ahí el nombre FINIS TERRAE, o fin de la tierra). Les asustaba pensar que más allá no había más que el horror del océano, poblado de monstruos míticos que aullaban pavorosamente entre la niebla, el caos y la nada abismal.

Los soldados romanos que venían de muy lejos creyeron firmemente que aquello era el fin de la tierra firme. El cónsul Décimo Junio Bruto y sus legionarios se espantaron al ver cómo el Sol se sumergía en el océano.

Las puestas de Sol en este lugar son espectaculares, lentas, y de gran belleza; indujeron al culto del Sol: aquí estaba el Ara Solis, altar y templo dedicado al curso declinante del Gran Astro.

Ej.: Si en el conjunto cociente $Z/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ del ejemplo anterior (apartado A) definimos la suma y el producto como leyes de composición interna, se pide: estudiar la estructura algebraica que le confieren estas leyes al conjunto Z/m.

Inicialmente formaremos las tablas de sumar y multiplicar en el conjunto Z/4:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Para la formación de las tablas hay que tener en cuenta que el resultado de cada suma o producto es un número que pertenecerá a alguna de las clases de equivalencia (clases residuales) definidas anteriormente, y por lo tanto colocaremos el representante de clase expresado para definirla, con lo que lograremos que inicialmente la suma o el producto sean leyes de composición interna (ver tema de estructuras algebraicas).

Así que a la vista de que + y · son leyes de composición interna, pasamos a comprobar sus propiedades.

Ley +

- Asociativa:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$\bar{0} + (\bar{1} + \bar{2}) = (\bar{0} + \bar{1}) + \bar{2}$$

$$\underbrace{\bar{0} + \bar{3}}_{\bar{3}} \qquad \underbrace{-\bar{1} + \bar{2}}_{\bar{3}}$$

Como los resultados de los dos miembros de la asociativa coinciden, se cumple la propiedad.

- Conmutativa.—Si trazamos la diagonal de la tabla, observamos que existe simetría geométrica en cuanto a elementos respecto de la diagonal, luego la propiedad se cumple.

- Elemento neutro.—Buscamos dentro de la tabla una fila y una columna iguales que las originales o muestras, como existen obsérvese que la intersección es el elemento neutro, en este caso $e = \bar{0}$.

– **Elemento simetrico.** –Como existe elemento neutro, buscaremos el elemento simétrico, observando en la tabla + si existe elemento neutro en todas las filas y columnas sin repetirse. Como así ocurre, existe elemento simétrico.

Luego (Z/4, +) posee la estructura de grupo abeliano o conmutativo.

Ley ·

– **Asociativa:**

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$\bar{0} \cdot \underbrace{(\bar{1} \cdot \bar{2})}_{\bar{0}} = \underbrace{(\bar{0} \cdot \bar{1})}_{\bar{0}} \cdot \bar{2}$$

se cumple la asociativa.

– **Conmutativa.** Se cumple.

– **Elemento neutro.** Posee neutro: $e = \bar{1}$.

– **Elemento simetrico.** No posee elemento simétrico, excepto si invalidásemos el cero.

Luego (Z/4, ·) posee la estructura del semigrupo abeliano con elemento neutro.

Leyes + ·

– **Distributiva:**

$$a * (b \perp c) = (a * b) \perp (a * c)$$

$$\bar{0} \cdot \underbrace{(\bar{1} + \bar{2})}_{\bar{3}} = \underbrace{(\bar{0} \cdot \bar{1})}_{\bar{0}} + \underbrace{(\bar{0} \cdot \bar{2})}_{\bar{0}}$$

Se cumple.

Luego (Z/4, +, ·) es un anillo conmutativo con elemento neutro o unidad.

Además observamos que en la tabla · existen elementos que sin ser cero ninguno de ellos, su producto es cero (por ejemplo, $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$), luego esto nos indica que el conjunto Z/4 posee divisores de cero, luego no puede ser dominio de integridad (efectivamente $m = 4$ no es primo).

Definitivamente (Z/4, +, ·) es un anillo conmutativo con elemento unidad.

Ej.: $\forall a, b, \in Z$, $a \equiv b \pmod 5$. Se pide:

1) Construir las tablas de sumar y multiplicar en Z/5.

2) Efectuar la siguiente operación en Z/5:

$$\bar{2}\ \bar{0}\ \bar{3} \cdot \bar{4}\ \bar{1}$$

Las matemáticas con sus símbolos en algunos casos totalmente abstractos y su lenguaje determinado por la lógica, ayudan a comprenderse internacionalmente a los científicos, algunas veces por encima de la lengua de cada país. Esta misma facilidad para los ya iniciados puede ser una barrera para el profano.

Sólo parte de este lenguaje ha sido derivado de la ciencia, el resto pertenece a la esfera del pensamiento humanista.

En términos puros las matemáticas tienen relación directa con todas las disciplinas del saber. Es de todos conocido que quien está instruido en esta ciencia llegue a apreciarla e incluso a quererla, con tanta pasión como un amante de las Bellas Artes, del ballet, de la poesía o de cualquier otra actividad propia del espíritu finamente civilizado. Debido a su falta de relación con la aplicación práctica, la matemática pura puede parecer un empeño sin utilidad. Pero lo cierto es que estas personas por su desarrollo mental son hoy empleados como sagaces consejeros de las grandes industrias multinacionales.

Nuestra civilización no se concibe sin el empleo más o menos encubierto de alguna parte de la ciencia matemática.

A los antiguos, la aparición de un cometa en el cielo les llenaba de terror. Para ellos no cabía esperar nada bueno de una bola de fuego, cuyo tamaño era la mitad del de la Luna y cuya cola recorría rápidamente el firmamento. Tal fenómeno sólo podía acarrear desgracias a los humanos.

Aún en plena época cristiana se seguía considerando a los cometas como fuentes de malos presagios. En el año 1066 apareció uno de ellos cuando Guillermo el Conquistador se disponía a invadir Inglaterra; poco después, cuando Haroldo, el rey sajón, fue vencido por Guillermo las gentes movían la cabeza de forma pensativa: la desgracia estaba advertida tras los augurios celestes.

La humanidad culta no considera actualmente a los cometas mensajeros de calamidades, pero los científicos siguen planteándose numerosos interrogantes.

3) Resolver el sistema de ecuaciones siguiente en $Z/5$:

$$\begin{aligned} \bar{2}\,x + \bar{3}\,y &= \bar{3} \\ \bar{3}\,x + \bar{4}\,y &= \bar{1} \end{aligned}$$

SOLUCIONES:

1)

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

·	0	1	2	3	4
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
4	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Deduciendo de lo visto anteriormente, el conjunto $(Z/5, +, \cdot)$ posee estructura de dominio de integridad (obsérvese que $m = 5$ es primo, por lo tanto no existen divisores de cero).

2)

$$\begin{array}{r} \bar{2}\ \bar{0}\ \bar{3} \\ \bar{4}\ \bar{1} \\ \hline \bar{2}\ \bar{0}\ \bar{3} \\ \bar{3}\ \bar{0}\ \bar{2} \\ \hline \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{3} \end{array}$$

Obsérvese que la multiplicación se realiza como normalmente se hace, teniendo en cuenta que cuando multipliquemos o sumemos deberemos de ir a la respectiva tabla y teniendo en cuenta las que nos llevemos que será cuando nos pasemos de $\bar{4}$ de cada tabla.

3) Para resolver el sistema no utilizaremos nada más que las operaciones suma y producto hasta que logremos despejar las dos incógnitas.

$$\begin{array}{r} \bar{2}\,x + \bar{3}\,y = \bar{3} \\ \bar{3}\,x + \bar{4}\,y = \bar{1} \\ \hline (\bar{2} + \bar{3})\,x + (\bar{3} + \bar{4})\,y = \bar{3} + \bar{1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bar{0}\,x + \bar{2}\,y &= \bar{4} \\ \bar{2}\,y &= \bar{4} \end{aligned}$$

Multiplicaremos ahora por el inverso de $\bar{2}$ que es $\bar{3}$ según la tabla $\cdot$ (ya que $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$, que es el neutro).

$$\bar{3} \cdot \bar{2}\,y = \bar{3} \cdot \bar{4} \rightarrow y = \bar{2}$$

Para obtener x, sustituimos y, en cualquiera de las ecuaciones primitivas, por ejemplo en la primera.

$$\bar{2}\,x + \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{3} \rightarrow \bar{2}\,x + \bar{1} = \bar{3}$$

Para hacer desaparecer el $\bar{1}$, le sumamos a cada miembro $\bar{4}$, según la tabla + (ya que $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$ que es el neutro).

$$\bar{2}x + \bar{1} + \bar{4} = \bar{3} + \bar{4}$$
$$\bar{2}x + \bar{0} = \bar{2} \rightarrow \bar{2}x = \bar{2}$$

Multiplicamos por el inverso de $\bar{2}$ que es $\bar{3}$.

$$\bar{3} \cdot \bar{2}x = \bar{2} \cdot \bar{3} \rightarrow x = \bar{1}$$

5.–NUMEROS INCONGRUENTES. SISTEMAS COMPLETOS

Cuando al dividir varios números respecto de un módulo m, obtenemos todos sus restos diferentes, se dice que esos números forman un sistema de números incongruentes mod. m.

Naturalmente, todos los restos que obtengamos deberán ser menores que m, es decir, podemos obtener como máximo m restos diferentes $\{0, 1, 2, 3, ..., m - 1\}$.

Pues bien, cuando en un sistema de números incongruentes respecto mod. m obtenemos m restos diferentes, diremos que el sistema es un **sistema completo.**

Ej.: Formar un sistema completo de números incongruentes, los números: 6, 9, 12, 15, 23, respecto mod. 5.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \underbrace{1} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \underbrace{4} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 5 \\ \underbrace{2} & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 5 \\ \underbrace{0} & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \underbrace{3} & 4 \end{array}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Ej.: Hallar el menor número x superior a 15, tal que $x \equiv 12$ (mod. 7).

El número x deberá de dar el mismo resto al dividirlo por 7 que el de la división 12: 7 que es 5, luego:

$$\begin{array}{r|l} x & 7 \\ \underbrace{5} & c \end{array} \rightarrow x = 7c + 5 \begin{cases} c = 1 \; ; \; x = 12 \\ c = 2 \; ; \; x = 19 \\ \vdots \qquad \vdots \end{cases} \rightarrow x = 19$$

Ej.: Determinar el mayor módulo respecto del cual los números 28, 52 y 88 son congruentes.

$$\begin{array}{r|l} 28 & m \\ \underbrace{r} & c_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 52 & m \\ \underbrace{r} & c_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 88 & m \\ \underbrace{r} & c_3 \end{array}$$

$$28 = c_1 m + r \qquad 52 = c_2 m + r \qquad 88 = c_3 m + r$$

Hay quienes afirman que la cabeza de un cometa es una insólita y peligrosa bola de nieve lanzada por un muchacho irresponsable, puesto que está formada, en realidad, por rocas cubiertas de hielo. Sin embargo, la generalidad de los expertos conviene en que los cometas no suponen graves peligros y, en caso de incidir contra la Tierra, sólo ocasionarían daños locales.

No obstante, la Tierra está constantemente amenazada. El 30 de octubre de 1937, la Tierra estuvo a 3 segundos de su total destrucción cuando Hermes, planeta menor de medio millón de toneladas, cruzó a 800.000 kilómetros de nosotros, viajando a la velocidad de la luz, es decir, 300.000 kms. por segundo. Hubiera bastado un ligerísimo cambio en su trayectoria para que atravesara la atmósfera y chocara contra la Tierra, produciéndose un impacto de tal violencia que hubiera acabado con el género humano.

La naturaleza se complace en crear igualdad aparente conservando una desigualdad total manteniendo sólo la estructura.

Este es el caso de las huellas dactilares que sirven para identificar a los seres humanos y que nos individualiza a todos. Esta impresión qua dejan los dedos en ciertas superficias pulidas es debida a la grasa natural que segregan los poros y que dibuja nuestra huella particular.

Antiguamente, las huellas dactilares se cubrían con polvos coloreados, pero las huellas que se descubrían eran un poco imprecisas. Se estudió un nuevo procedimiento consistente en con limaduras finísimas de hierro y un pincel magnético, el cual se hacía pasar por las limaduras hasta impregnarse completamente de ellos. Posteriormenta se pasa dicho pincal por la huella o huellas, como si se pintase, y entonces dichas limaduras se quedan en dicha huella como si se hubiera dibujado exactamente ésta.

Eliminando r entre las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 52 = c_2 m + r \\ -28 = -c_1 m - r \\ \hline 24 = (c_2 - c_1)\, m \\ \dfrac{24}{m} = c_2 - c_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 88 = c_3 m + r \\ -52 = -c_2 m - r \\ \hline 36 = (c_3 - c_2)\, m \\ \dfrac{36}{m} = c_3 - c_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 88 = c_3 m + r \\ -28 = -c_1 m - r \\ \hline 60 = (c_3 - c_1)\, m \\ \dfrac{60}{m} = c_3 - c_1 \end{array}$$

Como las diferencias $c_2 - c_1$; $c_3 - c_2$; $c_3 - c_1$; deben de ser enteras, ya que c_1, c_2 y c_3 son enteros por proceder de los cocientes de las divisiones. Tenemos que buscar un número m que divida exacta y simultáneamente a 24, 36 y 60 y como dice el problema que debe ser el mayor, éste será su m.c.d. (24, 36, 60)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

m.c.d. $(24, 36, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad ; \quad m = 12.$

Ej.: Hallar un número positivo x que tenga 20 divisores positivos, sea divisor de 28000 y verifique $x \equiv 10$ (mod. 11).

Descomponiendo en factores primos el $28000 = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7$, el número pedido, al tener que ser divisor de éste, será de la forma $N = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, con las condiciones $0 \leqslant x \leqslant 5$; $0 \leqslant y \leqslant 3$; $0 \leqslant z \leqslant 1$: ya que por el contrario no podría ser divisor de 28000.

Como además debe tener veinte divisores, no existe nada más que la posibilidad $x = 4$; $y = 1$; $z = 1$, ya que de esta forma el número de divisores $(4 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 20$.

Este número candidato es, pues, el $2^4 \cdot 5 \cdot 7 = 560$, que se puede comprobar que efectivamente es congruente con 10 (mod. 11), ya que si no encajase esta última condición el problema no tendría solución.

Así pues, definitivamente el número pedido es $N = 560$.

6.–RESTOS POTENCIALES

Se llaman restos potenciales de un número a, con respecto a un módulo m, a los restos que resultan de dividir las sucesivas potencias de a por m. Aunque el número de potencias de un número a es ilimitado, sus restos potenciales con respecto a un número m deben ser menores que m, por lo tanto el número de restos distintos será limitado.

En función de estas ideas podemos hacer las siguientes consideraciones:

a) Si alguno de los restos potenciales es nulo, lo son también todos los siguientes.

b) Cuando un resto se repita con otro, a partir de éste los restantes se manifiestan de igual forma.

c) Al grupo de restos que se repite se le llama **período.** Si el período comienza por el primer resto obtenido se dice que es **periódica pura.** Si el período no comienza por el primer resto obtenido se dice que es **periódica mixta.**

Ej.: Hallar los restos potenciales de 10 módulo 2.

$$\begin{array}{l|l} 10^0 & 2 \\ \hline \underbrace{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10^1 & 2 \\ \hline \underbrace{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10^2 & 2 \\ \hline \underbrace{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10^3 & 2 \\ \hline \underbrace{0} & \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$r_0 = 1 \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = 0 \qquad r_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots$$

restos potenciales = (1, 0, 0, 0, ...).

Ej.: Hallar los restos potenciales de 5 módulo 3.

$$\begin{array}{l|l} 5^0 & 3 \\ \hline \underbrace{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 5^1 & 3 \\ \hline \underbrace{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 5^2 & 3 \\ \hline \underbrace{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 5^3 & 3 \\ \hline \underbrace{2} & \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$r_0 = 1 \qquad r_1 = 2 \qquad r_2 = 1 \qquad r_3 = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots$$

restos potenciales = (1, 2, 1, 2, ...).

Periódica pura de período = 1, 2.

Ej.: Hallar los restos potenciales de 10 módulo 12.

$$\begin{array}{l|l} 10^0 & 12 \\ \hline \underbrace{1} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10^1 & 12 \\ \hline \underbrace{4} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10^2 & 12 \\ \hline \underbrace{4} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10^3 & 12 \\ \hline \underbrace{4} & \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$r_0 = 1 \qquad r_1 = 4 \qquad r_2 = 4 \qquad r_3 = 4 \qquad \ldots\ldots\ldots$$

restos potenciales = (1, 4, 4, 4, ...).

Periódica mixta de período = 4.

Obsérvese que este procedimiento para obtener los restos potenciales puede llegar a ser engorroso por las dificultades operativas que entraña, aunque es el elemental de concepto. Vamos, pues, a plantear otros métodos diferentes más factibles de operativa.

1) Podemos determinar los restos potenciales de un número a, respecto a un módulo m, sin más que dividir por m el producto del anterior resto multiplicado por a.

Ej.: Hallar los restos potenciales de 10 módulo 8. El primer resto es 1, ya que $10^0 : 8$ da de resto 1.

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = \frac{1 \cdot 10}{8} = 2 \quad ; \quad r_2 = \frac{2 \cdot 10}{8} = 4$$

$$r_3 = \frac{4 \cdot 10}{8} = 0 \quad ; \quad r_4 = 0 \ldots$$

2) También se pueden determinar los restos potenciales de un número a, respecto de un módulo m, hallando los restos potenciales del primer resto (del de la división $a^1 : m$) respecto del mismo módulo

$$\begin{array}{l|l} a & m \\ \hline \underbrace{r} & c \end{array} \rightarrow a = m \cdot c + r \rightarrow a = \dot{m} + r \rightarrow a \equiv r \rightarrow a^p \equiv r^p \ (\text{mod. } m)$$

En un ameno paraje, un grupo de flamencos rosados disfrutan de las caricias del sol.

Regocijábanse divididos en dos bandos.

Su octava parte al cuadrado en el bosque jugueteaba. Con alegres gritos doce escandalizando están.

¿Sabes cuántos flamencos hay en el grupo en total?

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x; \ \frac{x^2}{64} + 12 = x$$

$$\frac{x^2 + 768}{64} = x; \ x^2 + 768 = 64x$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$x = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 - 4x\,768}}{2} =$$

$$= \frac{64 \pm \sqrt{4.096 - 3.072}}{2} =$$

$$= \frac{64 \pm \sqrt{1.024}}{2}; \ x = \frac{64 + 32}{2} =$$

$$= \frac{96}{2} = 48$$

$$x = \frac{64 - 32}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Puede haber 48 ó 16 flamencos.

El ser humano está por su naturaleza muy limitado para vivir y desenvolverse en el medio acuático, por tanto las profundidades del mar fueron un verdadero misterio durante muchos miles de años. No puede considerarse realmente exploración submarina los ensayos que se realizaron en el siglo XIII en que buceadores atados con una cuerda y provistos con un depósito de aire (simple vejiga inflada) recuperaban mercancías caídas a poca profundidad. Sólo el descubrimiento y posterior desarrollo de la escafandra autónoma, equipada con botellas de aire comprimido, permitió alcanzar grandes profundidades y, lo que es más importante, aumentar el tiempo de permanencia para poder realizar exploraciones y trabajos submarinos hasta 90 m.

Para mayores profundidas se han creado cabinas espaciales con grandes adelantos técnicos.

Ej.: Hallar los restos potenciales de 10 módulo 7.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \underbrace{3} & \end{array}$$

luego hallamos los restos potenciales de 3 (mod. 7).

A continuación podemos proceder aplicando el procedimiento general o bien el del subapartado 1.

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = \frac{1 \cdot 10}{7} = 3 \quad ; \quad r_2 = \frac{3 \cdot 10}{7} = 2$$

$$r_3 = \frac{2 \cdot 10}{7} = 6 \quad ; \quad r_4 = \frac{6 \cdot 10}{7} = 4 \quad ; \quad r_5 = \frac{4 \cdot 10}{7} = 5$$

$$r_6 = \frac{5 \cdot 10}{7} = 1$$

restos potenciales = (1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, ...).

Periódica pura de período = 1, 3, 2, 6, 4, 5.

NOTA.—Existe la posibilidad de utilizar restos por exceso, en lugar de los restos por defecto. Esto se suele practicar cuando al realizar una división el resto por exceso es menor que el resto por defecto en valor absoluto. (Téngase en cuenta que en estos casos el resto por exceso será negativo.)

Ej.: Hallar los restos potenciales de 4 (mod. 11).

Haciéndolo por el procedimiento general:

$$\begin{array}{r|l} 4^0 & 11 \\ \underbrace{1} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4^1 & 11 \\ \underbrace{4} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4^2 & 11 \\ \underbrace{5} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4^3 & 11 \\ \underbrace{9} & \\ \underbrace{-2} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4^4 & 11 \\ \underbrace{3} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4^5 & 11 \\ \underbrace{1} & \end{array}$$

restos potenciales = (1, 4, 5, −2, 3, 1, ...).

Periódica pura de período = 1, 4, 5, −2, 3.

Practicando por el procedimiento abreviado:

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_2 = \frac{1 \cdot 4}{11} = 4 \quad ; \quad r_3 = \frac{4 \cdot 4}{11} = 5$$

$$r_4 = \frac{5 \cdot 4}{11} = 9 = -2 \quad ; \quad r_5 = \frac{9 \cdot 4}{11} = 3 \quad ; \quad r_6 = \frac{3 \cdot 4}{11} = 1$$

Ej.: Hallar el resto que se obtiene al dividir 4577^{394} entre 11. Aplicando los procedimientos de los subapartados 1 y 2:

$$\begin{array}{r|l} 4577 & 11 \\ \underbrace{1} & \end{array}$$

luego bastará hallar los restos de 1 (mod. 11).

De esta forma 4577^{394} dará el mismo resto que 1^{394} al dividirlo por 11:

$r_0 = 1$; $r_1 = \frac{1 \cdot 1}{11} = 1$, ..., período = 1 y consta de un término.

Luego 4577^{394} al dividirlo entre 11 da de resto 1.

Ej.: Hallar el resto que se obtiene al dividir 1654^{29} entre 7.

$$\begin{array}{r|l} 1654 & 7 \\ \underline{2} & \end{array}$$

luego bastará hallar los restos de 2 (mod. 7).

De esta forma, el 1654^{29} dará el mismo resto que 2^{29} al dividirlo por 7.

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = \frac{1 \cdot 2}{7} = 2 \quad ; \quad r_2 = \frac{2 \cdot 2}{7} = 4$$

$$r_3 = \frac{4 \cdot 2}{7} = 1, \ldots$$

período = 1, 2, 4 y consta de tres términos.

Luego $2^{29} = 2^{9 \cdot 3 + 2} = 2^{9 \cdot 3} \cdot 2^2 \equiv 2^2$.

El resto que se obtiene al dividir 2^2 entre 7 es 4. Luego el resto de 1654^{29} (mod. 7) es 4.

NOTA.—Obsérvese que siempre tendremos que dividir al exponente (en este caso, 29) entre la cantidad de términos de los que consta el periodo, ya que los restos 1, 2, 4, se irán repitiendo sucesivamente y efectuar la prueba de la división 29 : 3 (9 · 3 + 2); de esta forma, efectuando una sencilla descomposición en producto de potencias de la misma base, llegamos a $2^{9 \cdot 3} \cdot 2^2$; donde se sabe que cualquier potencia con exponente múltiplo de 3 (9 · 3) debe de ser la unidad, con lo que nos queda 2^2, que ya está encajado dentro de los componentes del primer período. En definitiva, el resultado siempre será el resto obteniendo de la aplicación del subapartado 2, elevado al resto de la división del exponente primitivo entre el número de componentes del período.

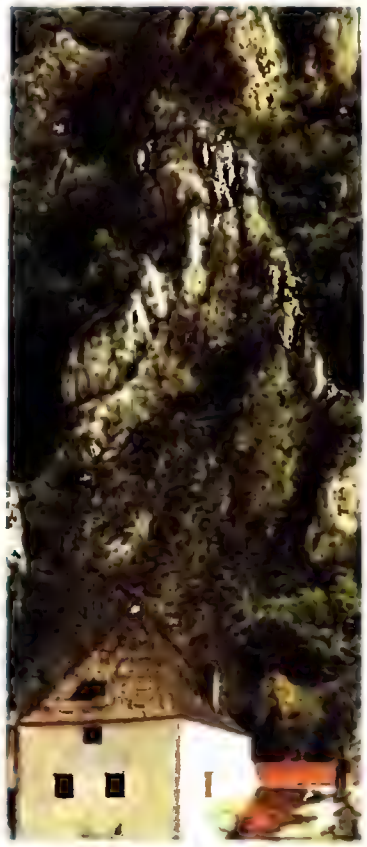
7.—CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Aunque los criterios de divisibilidad que se exponen están enfocados fundamentalmente para números dados en el sistema decimal, podemos extender estos criterios de igual forma a cualquier sistema de numeración.

Vamos a comenzar citando el teorema fundamental que condiciona y resuelve los criterios de divisibilidad, criterios que en el propio tema de divisibilidad sólo se exponían sin citar su procedencia, y que se obtienen a través de este tema de congruencias.

A.—Teorema fundamental. El resto que se obtiene al dividir un número N = n ... cba en el sistema decimal (base 10) respecto a un módulo m, es exactamente el mismo que el que se obtiene al hacer la suma de los productos de sus cifras por los restos potenciales de 10 respecto al módulo m:

$$N \equiv n \ldots cba \equiv ar_0 + br_1 + cr_2 + \ldots + nr_n$$



Casiodoro, llamado Flavio Magno, nació en el año 480 de nuestra era en Calabria; fue discípulo de Boecio; fundó el monasterio de Vivarium en el sur de Italia.

En este monasterio intentó unir la religión cristiana con la sabiduría griega; bajo su dirección se hicieron gran cantidad de copias de textos antiguos.

Este trabajo estaba inspirado en un ferviente deseo de transmitir la sabiduría anterior. Se daba el caso curioso de que muchos monjes copiaban de libros antiguos con infinita paciencia y sin comprender realmente lo que copiaban; su mérito era copiar de una forma escrupulosa punto por punto todo lo que tenían ante ellos. Esta labor que sólo se comprende considerando el espíritu religioso que inspiraba a estas personas, hizo posible la gran explosión cultural del Renacimiento.

Sin esta labor paciente y manual se hubiese perdido de una forma irreparable una parte de la obra escrita en la antigüedad.

Pensemos por un momento en el valor de los números, primeramente en la unidad, luego en el cinco, los dedos de una mano, después en el diez, las dos manos.

Con estos elementos podíamos sumar y realizar operaciones normales; efectuaremos un salto en el tiempo y encontraremos la necesidad de expresar cantidades menores de la unidad. Con una inocente marca —punto o coma, según los casos—, que situada delante de la unidad significa dividido por diez, completamos la escala. Los ceros añadidos a la derecha del número lo multiplican, los situados a la izquierda antes del punto o la coma lo dividen.

Pensando en términos de diez es interesante recordar para los cálculos mentales reglas tan sencillas como la de que para multiplicar una cantidad por cinco hace falta tan sólo dividirla por dos y añadir un cero.

Recuérdese también que multiplicar por nueve es igual a multiplicar por diez restando la cantidad multiplicada.

B.– Consecuencias del teorema fundamental. Del teorema fundamental se deduce que para que $N \equiv n \ldots cba$ sea divisible por por m, es necesario que lo sea el número $N \equiv ar_0 + br_1 + cr_2 + \ldots + nr_n$.

Ej.: Exponer el criterio de divisibilidad por 2 en el sistema decimal

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = \frac{1 \cdot 10}{2} = 0 \quad ; \quad r_2 = 0 \quad ; \quad \ldots$$

$$N = n \ldots cba = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + \ldots + n \cdot 0 = a$$

Luego vemos que la última cifra del número es la que me da el criterio de divisibilidad por 2. Es decir, que un número es divisible por 2 cuando lo sea su última cifra, la de las unidades (a = cero o par).

Ej.: Exponer el criterio de divisibilidad por 4 en el sistema decimal.

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = \frac{1 \cdot 10}{4} = 2 \quad ; \quad r_2 = \frac{2 \cdot 10}{4} = 0 \quad ; \quad r_3 = 0 \ldots$$

$$N = n \ldots cba = a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 0 + \ldots + n \cdot 0 = a + 2b$$

Un número es divisible por 4 cuando lo sea la suma de la cifra de las unidades más el duplo de las decenas.

Ej.: Deducir el criterio de divisibilidad por 13 en el sistema decimal y hallar el valor que debe tener m en el número 8201 m 046 para que sea divisible por 13.

$$r_0 = 1 \quad ; \quad r_1 = \frac{1 \cdot 10}{13} = 10 = -3 \quad ; \quad r_2 = \frac{10 \cdot 10}{13} = 9 = -4$$

$$r_3 = \frac{9 \cdot 10}{13} = 12 = -1 \quad ; \quad r_4 = \frac{12 \cdot 10}{13} = 3$$

$$r_5 = \frac{3 \cdot 10}{13} = 4 \quad ; \quad r_6 = \frac{4 \cdot 10}{13} = 1 \quad ; \quad r_6 = 10 = -3 \ldots$$

Período = 1, −3, −4, −1, 3, 4

$$N = n \ldots cba \equiv a - 3b - 4c - d + 3e + 4f + \ldots$$

Aplicándolo al número en cuestión:

$$8201\,m\,046 \equiv 6 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 0 - m + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 - 3 \cdot 8 \equiv$$
$$\equiv -25 - m = 13$$

Téngase en cuenta que m debe estar entre los números: 0, 1, 2, ..., 9. Para $m = 1 \rightarrow -26 = 13$.

Luego m = 1; y el número es 82011046.

TEMA 9

LOGICA

INDICE

1.—INTRODUCCION.
2.—CONCEPTO DE PROPOSICION.
3.—TIPOS DE PROPOSICIONES.
   A.—Proposiciones simples.
   B.—Proposiciones compuestas.
4.—TABLAS DE VERDAD.
5.—OPERACIONES CON PROPOSICIONES.
   A.—Disyunción inclusiva.
   B.—Disyunción exclusiva.
   C.—Conjunción.
   D.—Negación.
   E.—Implicación Lógica.
   F.—Equivalencia Lógica.
6.—TIPOS DE PROPOSICIONES.
   A.—Tartología.
   B.—Contradicción.
   C.—Indeterminación.
7.—INFERENCIA LOGICA.
8.—ESTRUCTURA PROPOSICIONAL. ALGEBRA DE BOOLE.

TEMA 9

GATO TREPADOR

Un gato se cayó a un pozo que tenía una profundidad de 10 metros. Inmediatamente se puso a trepar para intentar salvarse. Cada día subía 3 metros, pero luego se escurría y bajaba 2 metros. ¿Cuántos días tardará en salir del pozo?

SOLUCION

La mayoría de la gente coge la solución equivocada, o sea, si sube 3 metros y baja 2 metros, sube al día 1 metro, y como el pozo tiene 10 metros, tardaría 10 días. Esta no es la solución.

Trepa el primer día 3 metros y cae 2 metros, luego ha subido 1 metro, y así sucesivamente hasta el 8.º día que ha subido del 7.º al 10.º metro; al llegar a este punto el gato ya está en la superficie y puede salir libremente.

Luego tardará 8 días en quedar libre.

LOGICA

1.–INTRODUCCION

Este tema se puede prestar a discusión, en cuanto a que forme o no forme parte del contenido de las Matemáticas.

Sin embargo la arquitectura de las Matemáticas se ha fundamentado a lo largo de su desarrollo en una serie de premisas y razonamientos que han conducido a las formas de cálculo y conocimiento de que hoy están dotadas y, traspasando en cierto modo estas fronteras, han llegado a invadir un nuevo terreno como el de la informática, en donde la lógica de los razonamientos es un arma de singular precisión.

Todos debemos conocer y saber en qué están basados los pormenores lógicos y primarios que ha seguido la ciencia. Esta se ha apoyado en:

– Ideas primarias, que no admiten definicion y simplemente se han enunciado (Ej.: Conjunto, punto, recta, ...).

– Ideas definidas, que se han manifestado y determinado en función de sus propiedades características (Ej.: Relación binaria, cuadrado, ...).

Estos dos tipos de ideas han dado lugar a dos tipos de conceptos, conocidos por todos, como son:

– Axiomas o postulados. Es decir, conceptos cuya veracidad se admite sin ningún tipo de demostración (Ej.: Por dos puntos cualquiera únicamente puede pasar una recta).

– Teoremas. Es decir, conceptos que son deducidos lógicamente de los axiomas. Para formular un teorema simple se parte de una hipótesis (premisas) para llegar a una tesis (conclusión).

Es natural que las hipótesis deben de asegurarse como ciertas (es cierto que es verdadero o es cierto que es falso) para poder llegar a precisar el resultado o conclusión. (Existe un principio fundamental de la lógica que dice: es necesario partir de premisas ciertas para saber si la conclusión es verdadera o falsa.)

Aunque para demostrar cualquier teorema en Matemáticas siempre se parte de premisas verdaderas (es cierto que es verdad). En el tema que nos ocupa, vamos a especular con la certeza de lo verdadero o de lo falso, ampliando de esta forma las posibilidades operativas.

2.–CONCEPTO DE PROPOSICION

Lo que antes hemos llamado premisa, va a recibir el nombre de proposición, adaptando el léxico al tema.

Se entiende por proposición a cualquier conjunto de palabras que reúna las dos condiciones siguientes:

(a) Que tengan sentido lógico.

(b) Que podamos afirmar de ellas que es verdadero o falso lo que expresan.

Sin embargo es conveniente hacer las siguientes consideraciones:

– Las interrogaciones, exclamaciones y mandatos no son proposiciones por no poder afirmar de ellas que sean verdaderas o falsas, aunque cumplan la condición de tener sentido lógico.

Ej.: Vete al cine.

E.: ¿Qué hora es?

Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez.

Pues bien, a las proposiciones las representaremos con las letras p, q, r, s...

Toda proposición posee un valor lógico. Cuando una proposición sea verdadera la asignaremos el valor lógico V.

Cuando una proposición sea falsa la asignaremos el valor lógico F.

En cualquiera de los dos casos simbolizaremos:

V(p) = V (p es proposición verdadera).

V(q) = F (q es proposición falsa).

Ej.: p "El caballo es un animal" → V(p) = V.

Ej.: q "Los peces tienen patas" → V(q) = F.

3.–TIPOS DE PROPOSICIONES

A.–Proposiciones simples o atómicas.–Son aquellas que únicamente transmiten una idea o concepto y en las que el enunciado es el mínimo.

Ej.: p: "Los perros tienen cuatro patas".

B.–Proposiciones compuestas o moleculares.–Son aquellas proposiciones que transmiten más de una idea o concepto y se componen de varias proposiciones simples.

Ej.: "La rosa es una flor y el gato es un animal".

La ciencia ha tenido grandes hombres dedicados a la investigación constante, que en su deseo de solucionar los problemas de su época dieron gran impulso a la investigación. Uno de éstos fue el reverendo Stephen Hales, hombre metódico y gran calculador, que se dedicó a los problemas de la ventilación de locales cerrados.

Hales, nacido en el año 1677, proyectó unos molinos de viento que renovaban el aire del interior de los barcos de guerra. Presentó el proyecto al Almirantazgo Británico, que no tomó en consideración su idea. Logró su instalación en los barcos que transportaban esclavos y se redujo la mortalidad de éstos de forma espectacular.

En aquella época se creía que la mortalidad por hacinamiento en prisiones, barcos, etc., era causada por el aire viciado. Consiguió Hales la instalación de su famoso molino de ventilación en un penal, consiguiendo buenos resultados, aunque en realidad la mortalidad era propagada por los piojos y la suciedad.

Existe una anécdota muy curiosa de Gauss (el niño prodigio de las matemáticas).

Cuando tenía solamente 10 años, se pidió en su clase que se sumaran todos los números del 1 al 100. Rapidísimamente escribió en su pizarra 5.050.

Al cabo de un rato, cuando todos los demás entregaron sus pizarras, el profesor le preguntó el porqué de tal rapidez. Gauss contestó a dicho profesor que todos los pares de los números del 1 al 100 opuestos y por orden (1 y 100; 2 y 99; 3 y 98; 4 y 97; 5 y 96; 6 y 95; 7 y 94, etc., y así hasta el final, o sea, al 50 y 51) sumaban siempre 101; por lo tanto, los 50 pares de números son 50 x 101 = 5.050.

NOTA: La operación que él realizó fue más sencilla: 50 x 100 = 5.000 y más 50, o sea, 5.050 en total. Probadlo.

Como se observa esta proposición es compuesta ya que indica más de una idea. Es decir, está formada por dos proposiciones simples:

Ej.: p: "La rosa es una flor".
q: "El gato es un animal".

Es natural pensar que el valor lógico de una proposición compuesta está determinado por el valor lógico de las proposiciones simples que la componen y por el tipo de unión u operación que ligue las citadas proposiciones simples y que serán de estudio detallado en los siguientes apartados.

4.–TABLAS DE VERDAD

Se llaman así a los esquemas o cuadros que indican los posibles valores lógicos de una proposición compuesta en función de las proposiciones simples por las que esté definida. Generalmente se comienza por poner un encabezamiento horizontal en la tabla, iniciándolo por las proposiciones simples elementales que componen la proposición compuesta y pasando por todas las etapas lógicas hasta completar la proposición compuesta final; en este caso la tabla nos proporcionará el número de columnas necesarias para llegar al final. El número de filas de que consta cualquier tabla de verdad responde a la fórmula 2^n, siendo n el número de proposición simple que compone la proposición compuesta.

5.–OPERACIONES CON PROPOSICIONES

A.–Disyunción inclusiva

Dadas dos proposiciones **p** y **q** se llama disyunción inclusiva a la proposición compuesta que se caracteriza por ser verdadera, cuando son verdaderas p o q, o ambas a la vez.

Se representa por el símbolo $\vee$.

Veamos la tabla de verdad correspondiente a esta operación.

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Indicaremos unas ideas que sirven para la confección de las tablas de verdad y que ya se han expuesto en la pregunta 4.

– Obsérvese que el número de columnas corresponde a la sucesión de proposiciones simples que nos permitan llegar a la proposición compuesta p∨q motivo de cálculo.

– El número de filas coincide con todas las posibilidades que se pueden efectuar con dos proposiciones simples p y q y que efectivamente responde a la fórmula 2^n.

$$2^n = 2^2 = 4 \text{ posibilidades}$$

Véase cómo el nexo de unión entre las dos proposiciones es la palabra "o".

Ej.: Dadas las proposiciones:

P: "Los árboles son mamíferos".

Q: "El perro es un animal".

Hallar la proposición disyunción $p \vee q$.

$$\left.\begin{array}{l} \vee\,(p) = F \\ \vee\,(q) = \vee \end{array}\right\} \rightarrow \vee\,(p \vee q) = \vee$$

Y escribiríamos:

$p \vee q$: "Los árboles son mamíferos o el perro es un animal".

Este tipo de disyunción es el que posee analogía con la operación unión de los conjuntos (un elemento pertenece al conjunto unión, cuando pertenece al menos a uno de los conjuntos que formalizan la operación).

B.—Disyunción Exclusiva

Dadas dos proposiciones p y q, se llama disyunción exclusiva a la proposición compuesta que se caracteriza por ser verdadera cuando son verdaderas p o q. Se representa por el símbolo $\triangle$ o $\veebar$.

Veamos la tabla de verdad correspondiente a esta operación:

p	q	$p \triangle q$
$\vee$	$\vee$	F
$\vee$	F	$\vee$
F	$\vee$	$\vee$
F	F	F

NOTA.—Cuando no se especifica el tipo de disyunción se supondrá que nos referimos a la disyunción inclusiva ($\vee$).

Las carreras de caballos mueven enormes cantidades de dinero. Con un sistema matemático de apuestas sencillas, múltiples y combinadas se pueden desarrollar teorías combinatorias muy interesantes. El cariño a estos caballos llega a extremos inusitados. Un propietario dejó en su testamento una fuerte suma para construir un monumento al animal que tantas alegrías le proporcionó con sus triunfos.

En Tohoku (Japón) se encuentra situado el único balneario de aguas termales para caballos. En un paisaje maravilloso, verde en verano, blanco en invierno, perforado por infinidad de manantiales termales con peculiaridades curativas, se encuentra el balneario que la Sociedad Hípica ha construido para los aristócratas equinos de las carreras. Lo mismo que las personas, tienen que hacer las reservas con mucha anticipación, porque son muchos más los caballos que necesitan los citados baños que las "habitaciones" disponibles. Los caballos, que al principio por estar desacostumbrados al ambiente se resisten muchas veces a entrar en sus baños individuales, cuando se acostumbran les gustan tanto que la dificultad es hacerles salir cuando han terminado el tratamiento.

Uno de los factores que más en cuenta se tiene es la sicología del caballo. Es un hecho reconocido entre los entendidos que son muy pocos los caballos que entran voluntariamente en un baño de agua caliente.

Un prestigioso hombre de ciencia ha llegado a la conclusión de que de cada mil niños, cincuenta están un poco por encima del nivel normal, veinte pueden ser calificados de "ingenios" y uno sólo como niño prodigio. De estos niños sólo uno llega a la fama y a la popularidad. Y además de todos estos seres privilegiados ninguno acaba su vida considerados como prodigios: todos acaban en el anonimato y el olvido.

En América se cita un ejemplo elocuente: Willian J. Sids parecía destinado a la gloria. A los dos años sabía leer y escribir; a los siete pasaba el examen de anatomía en la Universidad; y a los ocho años conocía el alemán, latín, italiano, francés y el griego. A los once pronunciaba una conferencia sobre la cuarta dimensión y a los dieciséis años se doctoraba "cum laude". Pero a los veintiún años era un simple empleado en un oficina con cincuenta dólares a la semana, muriendo a los cincuenta y seis en la miseria. Todavía es más espectacular el caso de otro norteamericano, que ocurrió a principios de este siglo: Edward Hardy. A los once años conocía a fondo doce lenguas, ocho ciencias, entre ellas las matemáticas y la música. Era también un gran experto en historia asiria y babilónica. Hoy no se sabe lo que ha sido de él. Lo mismo ocurrió con Myra Bradwell, poetisa agasajada a los seis años por un volumen suyo de versos, y con el pequeño Newton Wastings, que a los seis años pronunciaba maravillosamente sermones religiosos. Ambos desaparecieron en el silencio.

Los expertos afirman que estas precocidades se deben a anomalías del sistema nervioso que, corregidas con el paso del tiempo, reducen al individuo a su nivel normal de inteligencia. Parece ser que todo se debe a perturbaciones glandulares.

C.- Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q se llama conjunción a la proposición compuesta que se caracteriza por ser verdadera cuando son verdaderas p y q a la vez. Se representa por el símbolo $\wedge$.

Veamos la tabla de verdad correspondiente a esta operación.

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

El nexo que liga a las dos proposiciones es la palabra "y".

La conjunción posee analogía con la intersección de conjuntos. (Un elemento pertenece al conjunto intersección cuando pertenece a ambos.)

Ej.: Dadas las proposiciones:

P: "El trigo es un mineral".

Q: "El agua es un líquido".

Hallar la proposición conjunción p∧q.

$$\left.\begin{array}{l} V(p) = F \\ V(q) = V \end{array}\right\} \rightarrow V(p \wedge q) = F$$

y escribiremos:

p∧q: "El trigo es un mineral y el agua es un líquido".

D.- Negación

Dada una proposición p, llamaremos negación a la proposición simple que está caracterizada por ser verdadera cuando p es falsa o por ser falsa cuando p es verdadera.

Se representa por el símbolo $\bar{p}$.

Veamos la tabla de verdad correspondiente a esta operación.

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Ej.: Dada la proposición:

p: "El río lleva agua".

Halla la proposición negación $\bar{p}$.

$$\vee(p) = \vee \rightarrow \vee(\bar{p}) = F$$

Y escribiremos:

$\bar{p}$: "El río no lleva agua".

La negación posee analogía con la complementariedad de conjuntos. (Si un elemento pertenece a un conjunto, no pertenece a su complementario.)

E.—Implicación lógica

Dadas dos proposiciones p y q, llamaremos implicación lógica a la proposición compuesta que está caracterizada por ser verdadera siempre, excepto cuando la primera, p, sea verdadera y la segunda, q, sea falsa. Téngase en cuenta que ésta es la única operación con proposiciones en la que el orden de las dos está revestido de importancia.

Se representa por el símbolo $\Rightarrow$.

Veamos la tabla de verdad correspondiente a esta operación.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

María Montessori, fundadora del sistema educativo que lleva su nombre, creó un método pedagógico basado en la cuidadosa observación de los niños, en su libertad en la escuela y en la abolición de premios y castigos. Para la iniciación matemática dispone entre otros materiales de unas varas de madera que a partir de 10 cm la menor van aumentando su longitud de diez en diez cm hasta llegar a 1 m; representan los números del uno hasta el diez inclusive. La ventaja de esta serie consiste en poder presentar unidas, pero diferenciadas, las unidades componentes de cada uno de los números que forman la primera decena.

La vara del seis, por ejemplo, por su coloración alterna rojo, azul cada sexta parte, presenta la suma total y las 6 unidades componentes diferenciadas con toda claridad. La colocación de estas varas, en diferentes posiciones entre sí, constituyen un método para iniciar a los párvulos en las operaciones de adición y sustracción.

Esta forma de educar tiene un éxito notable en su forma para ir gradualmente iniciando a los niños en el terreno del cálculo.

El nexo que liga a las dos proposiciones es la palabra "Luego".

Ej.: Dadas las proposiciones:

p: "El cielo es azul".

q: "El año tiene doce meses".

Hallar la proposición implicación lógica $p \Rightarrow q$.

$$\left.\begin{array}{l} \vee(p) = \vee \\ \vee(q) = \vee \end{array}\right\} \Rightarrow \vee(p \Rightarrow q) = \vee$$

Y escribiremos:

$p \Rightarrow q$: "El cielo es azul, luego el año tiene doce meses".

La implicación lógica posee analogía con la inclusión de conjuntos (si un $A \subset B$, un elemento de A tiene que pertenecer a B y un elemento que no sea de A puede o no pertenecer a B).

F.—Equivalencia lógica

Dadas dos proposiciones p y q, llamaremos equivalencia lógica a la proposición compuesta que está caracterizada por ser verdadera, cuando p y q sean verdaderas o falsas a la vez.

Se representa por el símbolo $\Leftrightarrow$.

Veamos la tabla de verdad correspondiente a esta operación.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El nexo que liga las dos proposiciones es "si y sólo si".

Ej.: Dadas las proporciones:

p: "El viernes es un día de la semana".

q: "El hombre tiene piernas".

Hallar la proposición equivalencia lógica $p \Leftrightarrow q$.

$$\left.\begin{array}{l} \vee(p) = \vee \\ \vee(q) = \vee \end{array}\right\} \rightarrow \vee(p \Leftrightarrow q) = \vee$$

Y escribiremos:

$p \Leftrightarrow q$: "El viernes es un día de la semana, si y sólo si el hombre tiene piernas".

La equivalencia lógica posee enalogía con la igualdad de conjuntos. (Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.)

El estudio matemático de los juegos de azar permitió descubrir las leyes de la probabilidad que acechan a toda sucesión de hechos.

En la actualidad estas leyes aplicadas por personas experimentadas permiten determinar lo que debe pagar un hombre por una nueva póliza de cualquier clase de seguros que afecte a su vida; también permite hacer predicciones en las campañas electorales. Se utilizan en experimentos atómicos para calcular estadísticamente el movimiento de partículas en el interior de un desintegrador de átomos.

Por medio de ecuaciones complicadísimas de cálculo y geometría analítica, los matemáticos concibieron formas geométricas fuera del alcance de nuestra vista, formas de un número infinito de dimensiones y espacios infinitos donde encajan estas formas.

El espacio de más de tres dimensiones fue básico para las ideas de la relatividad y del universo.

Por estos métodos se resuelven complicadísimos problemas de campos eléctricos y magnéticos, aplicados a la televisión y a los ordenadores.

6.–TIPOS DE PROPOSICIONES

A.–Tautología.–Se llama así a toda proposición compuesta que siempre reproduce valores lógicos verdaderos, independientemente de los valores lógicos de las proposiciones simples que la componen.

B.–Contradicción.–Se llama así a toda proposición compuesta que siempre reproduce valores lógicos falsos, independientemente de los valores lógicos de las proposiciones simples que la componen.

C.–Indeterminación.–Se llama así a toda proposición compuesta que reproduce valores lógicos verdaderos y falsos, independientemente de los valores lógicos de las proposiciones simples que la componen.

NOTA.–Llamaremos **proposiciones equivalentes** a aquellas que tienen la misma tabla de verdad (es decir, que los resultados coinciden).

Ej.: Hacer la tabla de verdad de la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow q$ y clasificarla.

Lo primero que debemos hacer es efectuar el esquema preparativo de lo que va a ser la tabla de verdad. Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

– Formaremos la fila correspondiente al encabezamiento de la tabla, pasando por todas las proposiciones que nos permitan llegar a la proposición pedida.

Siempre partiremos de las dos simples que influyen en la proposición compuesta, en este caso p y q.

Obsérvese que la última operación a realizar es la simplificación lógica (téngase en cuenta que influye el orden), y para ello tenemos que deducir antes los valores lógicos de $p \wedge q$ y los de q.

Así, pues, el encabezamiento de la tabla es:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$

– Formaremos las dos columnas, correspondientes a todas las posibilidades de combinar los valores lógicos V y F con las proposiciones simples p y q; que según la fórmula son $2^n = 2^2 = 4$.

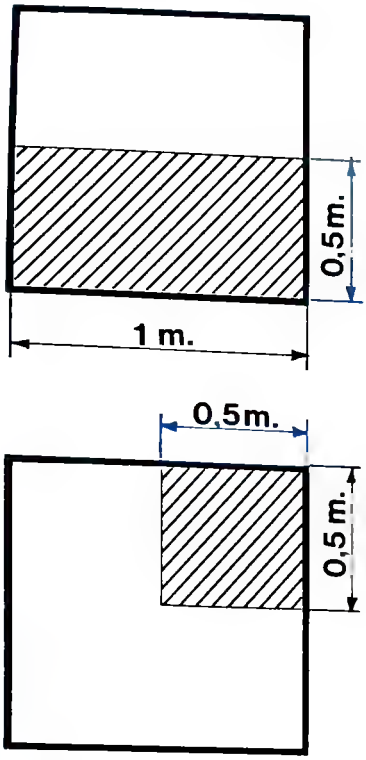
p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

La esperanza de vida en el hombre crece paulatinamente. Varía, como es natural, de unos países a otros, según su grado de desarrollo, influyendo también sus costumbres alimenticias y su nivel sanitario.

Así, por ejemplo, en Suecia, es de 74 años; Países Bajos, 73; Inglaterra, Francia y Alemania Occidental, 71, y en España estamos actualmente en los 70 años. También se está ampliando el período útil de uso correcto de nuestros sentidos. La edad mental, o sea, el nivel psicológico de una persona y que aprecia su desarrollo intelectual en una edad determinada se mide desde el año 1905 en que Binet creó la primera escala métrica de inteligencia. En la actualidad existen diversos tests. En ellos, y una vez efectuadas las pruebas apropiadas, se obtiene una edad mental medida en meses; ésta se divide por la edad cronológica real consiguiendo así el valor del llamado coeficiente intelectual. Esta fórmula se expresa así:

$$\text{Coeficiente I} = \frac{\text{Edad tests} \times 100}{\text{Edad cronológica}}$$

Estas mediciones son todavía relativas, dada la dificultad de reducir a números reacciones tan complejas del ser humano.



CURIOSIDADES

A simple vista, y sin pensarlo mucho, se suele caer en la trampa de creer que medio metro cuadrado es igual a la mitad de un metro cuadrado.

Estudiando por separado cada caso, observamos que medio metro cuadrado es la superficie delimitada por un cuadrado de 0,5 metros de lado.

Por el contrario, en el caso de la mitad de un metro cuadrado es el resultado de dividir en 2 partes un cuadrado de 1 m de lado, o sea, que la mitad de un metro cuadrado es un rectángulo de 1 × 0,5 m, justo una superficie doble que la anterior.

— Así que la tabla de verdad es:

(1) p	(2) q	(3) $p \wedge q$	(4) $(p \wedge q) \Rightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Las columnas (1) y (2) son las originales. La (3) la obtenemos de (1) y (2). La (4) la obtenemos de (3) y (2) en este orden.

A la vista de los resultados, como todos son verdaderos, diremos que la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow q$ es una tautología.

Ej.: Hacer una tabla de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge \overline{p \vee q}$ y clasificarla.

(1) p	(2) q	(3) $p \wedge q$	(4) $p \vee q$	(5) $\overline{p \vee q}$	(6) $(p \wedge q) \wedge \overline{p \vee q}$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

La columna (3) la obtenemos de (1) y (2). La (4) de (1) y (2). La (5) de la columna (4). La (6) se obtiene de (3) y (5).

Luego es una indeterminación, por ser todos los valores lógicos de $(p \wedge q) \wedge \overline{p \vee q}$ falsos.

Ej.: Clasificar la proposición $(p \Leftrightarrow q) \vee \overline{p}$.

(1) p	(2) q	(3) $p \Leftrightarrow q$	(4) $\overline{p}$	(5) $(p \Leftrightarrow q) \vee \overline{p}$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

La columna (3) se obtiene de (1) y (2). La (4) de (1). La columna (5) de (3) y (4).

Como los valores lógicos de $(p \Leftrightarrow q) \vee \overline{p}$ son verdaderos y falsos se trata de una indeterminación.

Ej.: Clasificar la proposición: $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)$.

Obsérvese que ahora existen tres proposiciones simples, p, q y r, así que el número de posibilidades aumenta al combinar los valores lógicos V y F ($2^n = 2^3 = 8$ posibilidades).

Los encabezamientos de la tabla se siguen obteniendo de la misma forma.

(1) p	(2) q	(3) r	(4) $p \wedge q$	(5) p	(6) $p \Rightarrow r$	(7) $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V

Las columnas (1), (2) y (3) son las proposiciones simples. La (4) se obtiene de (1) y (2). La (5) de (1). La columna (6) se obtiene de (5) y (3) en este orden. La (7) se obtiene de (4) y (6). Así que resulta una indeterminación.

Ej.: Clasificar la proposición $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$:

(1) p	(2) q	(3) r	(4) $p \Rightarrow q$	(5) $q \Rightarrow r$	(6) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	(7) $p \Rightarrow r$	(8) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V

La columna (4) se obtiene de (1) y (2). La (5) de (2) y (3) en este orden. La (6) de (4) y (5). La columna (7) se obtiene de (1) y (3). La columna (8) se obtiene de (6) y (7) en este orden. Es una Tautología.

Ej.: Averiguar si las proposiciones $\overline{p \wedge (q \vee \bar{p})}$ y $\overline{p \wedge q}$ son equivalentes.

En estos casos, lo mejor es presentar las dos proposiciones en la misma tabla de verdad.

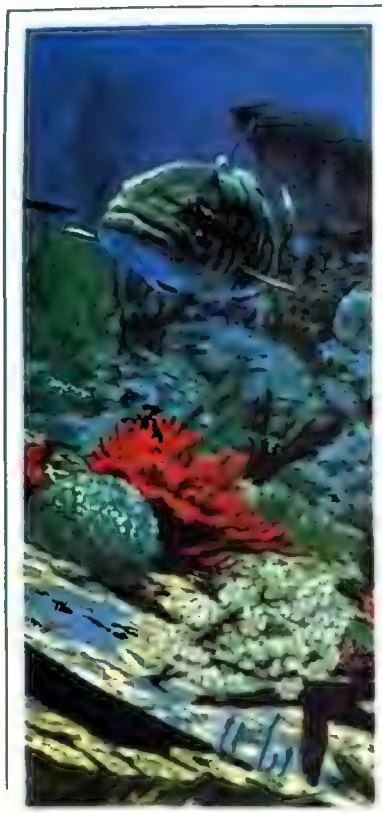
(1) p	(2) q	(3) $\bar{p}$	(4) $q \vee \bar{p}$	(5) $p \wedge (q \vee \bar{p})$	(6) $\overline{p \wedge (q \vee \bar{p})}$	(7) $p \wedge q$	(8) $\overline{p \wedge q}$
V	V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	F	V

CURIOSIDADES

Si las ciudades tuvieron una gran influencia en las transformaciones sociales y económicas de Europa en el siglo XII, también jugaron un gran papel en el movimiento intelectual. Al final de este siglo ya se encuentran obras literarias y obras de arte producidas en el seno de la nueva burguesía. Hasta entonces la ciencia era monopolio del clero y se escribía en latín; la arquitectura y la escultura sólo se emplea en la construcción y decoración de iglesias.

En esta época los consejos municipales empezaron a preocuparse en la instrucción de sus hijos. Fundaron escuelas; gracias a ellos la enseñanza deja de ser un beneficio exclusivo de los novicios de los monasterios.

El conocimiento de la lectura, escritura y aritmética, indispensables para la práctica del comercio, fue asimilado como una necesidad cotidiana y no como un lujo intelectual al que solamente los nobles tenían derecho.



En el siglo XIX, y a pesar del frenesí alcanzado por las exploraciones científicas, todavía las dos terceras partes de la superficie terrestre estaban realmente sin explorar.

En esta época se iniciaron los rudimentos de una ciencia, la Oceanografía, que, a decir de muchos, puede ser el remedio futuro de las grandes necesidades del hombre.

Cuando en 1876, Forbes, hombre metódico y calculador, volvió de un viaje de 3 años y medio y de recorrer 70.000 millas por los océanos a bordo del "Challenger", había reunido más material del conocido hasta la fecha. Idearon aparatos y útiles para sondear las profundidades; con sus útiles extrajeron de las profundidades formas asombrosas de vida, muchas de ellas relacionadas con especies desaparecidas; descubrieron cerca de 5.000 especies nuevas de seres vivientes.

La columna (3) se obtiene de la columna (1). La (4) de (2) y (3). La columna (5) de (1) y (4). La columna (6) se obtiene de la columna (5). La (7) de (1) y (2). La columna (8) de (7).

Efectivamente, las dos proposiciones dadas son equivalentes, ya que reproducen la misma tabla de verdad (véanse las dos columnas remarcadas).

Ej.: Dadas las proposiciones:

p: "Los pájaros vuelan"

q: "La música se oye"

hallar las proposiciones: $p \vee q$, $p \wedge q$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{\bar{p}}$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$, $(\overline{p \Rightarrow q}) \wedge \bar{p}$.

Obsérvese que en este tipo de problemas, en los que nos dan las proposiciones p y q, no hace falta hacer tabla de verdad, ya que ésta se reduce simplemente a una de sus filas.

Así que partimos afirmando que:

$\vee\ (p) = \vee$

$\vee\ (q) = \vee$

Empecemos pues a estudiar lo que se pide:

$-\vee\ (p \vee q) = \vee$ y escribiremos: $p \vee q$: "Los pájaros vuelan o la música se oye".

$-\vee\ (p \wedge q) = \vee$ y escribiremos: $p \wedge q$: "Los pájaros vuelan y la música se oye".

$-\vee\ (\bar{p}) = F$ y escribiremos: $\bar{p}$: "Los pájaros no vuelan".

$-\vee\ (\bar{q}) = F$ y escribiremos: $\bar{q}$: "La música no se oye".

$-\vee\ (\bar{\bar{p}}) = \vee$ y escribiremos: $\bar{\bar{p}}$: "No es cierto que los pájaros no vuelan". También $\bar{\bar{p}}$: "Los pájaros vuelan" ($\bar{\bar{p}} = p$).

$-\vee\ (p \Rightarrow q) = \vee$ y escribiremos: $p \Rightarrow q$: "Los pájaros vuelan luego la música se oye".

$-\vee\ (p \Leftrightarrow q) = \vee$ y escribiremos: $p \Leftrightarrow q$: "Los pájaros vuelan si y sólo si la música se oye".

$-\vee\ (\overline{p \Leftrightarrow q}) = F$ y escribiremos: $\overline{p \Leftrightarrow q}$: "No es cierto que los pájaros vuelen si y sólo si la música se oye".

$-\vee\ [(p \Rightarrow q) \wedge \bar{p}] = F$ y escribiremos: $(p \Rightarrow q) \wedge \bar{p}$: "Los pájaros vuelan luego la música se oye y los pájaros no vuelan".

Ej.: De tres proposiciones p, q y r se sabe que:

$\vee\ (p \vee q \vee r) = \vee$

$\vee\ (p) = F$

$\vee\ (q) = F$

Averiguar cómo debe ser la proposición r.

Siendo p y q falsas y la disyunción de las tres verdadera; como la disyunción únicamente es falsa cuando las tres son falsas, no le queda más remedio a $\vee\ (p \vee q \vee r) = \vee$ que tener alguna de las

proposiciones verdadera, ya que dos de ellas son falsas, luego $\vee (r) = \vee$.

Ej.: De tres proposiciones se sabe que:

$p \Leftrightarrow q$

$q \Leftrightarrow r$

$\vee (p) = \vee$

Averiguar cómo debe ser la proposición r.

Cuando no se indica el valor lógico de una operación, debemos de suponer que es cierto, es decir, que podemos pensar que: $\vee (p \Leftrightarrow q) = \vee$ y $\vee (q \Leftrightarrow r) = \vee$.

Pues bien, ya sabemos que la equivalencia lógica es verdadera cuando las dos son verdaderas o falsas a la vez; así que si $\vee (p) = \vee$, el $\vee (q) = \vee$ luego el $\vee (r) = \vee$.

7.–INFERENCIA LOGICA

Se entiende por inferencia lógica al razonamiento u operaciones que permiten obtener una conclusión o proposición compuesta a través de unas premisas o proposiciones simples.

Hay veces que los razonamientos expresados por el hombre en cualquier lenguaje comúnmente usado son complejos y no es fácil predecir su validez.

En estos casos la única forma de asegurar la conclusión es recurrir al uso de la lógica de las proposiciones.

Las máquinas de escribir tienen su historia y su prehistoria también. Esta data de 1714, cuando la reina Ana concedió al ingeniero inglés Henry Hill una patente para la construcción de un "Aparato de escritura mecánica que permita escribir las letras separadas y progresivamente como en la escritura manual". A partir de aquella fecha la idea de la máquina de escribir rodó por diversos países, siendo tema para que los inventores demostrasen su ingenio. En 1780 un francés, Pingeron, construía una máquina destinada a los ciegos. Por entonces Braman, el italiano Turri y L'Hermina crearon una máquina rudimentaria cuyo sistema de teclas independientes ha perdurado hasta las máquinas de nuestros días. En 1838 el francés Dejardin, miembro de la Real Sociedad de Ciencias, Agricultura y Artes de Lille, construía un aparato que llamó "Tachigraphe", con la pretensión de alcanzar mediante él la velocidad del pensamiento.

Durante la segunda mitad del siglo XIX el desarrollo industrial y comercial de los EE.UU. estimuló a los inventores para que perfeccionaran aquellas rudimentarias máquinas de escribir nacidas en Europa.

Fue John Jones quien en 1852 creó la máquina que puede considerarse como la verdadera antecesora de las que nosotros conocemos. En 1867 los impresores Sholes y Soule, también norteamericanos, inspirándose en la máquina de tambor creada por su compatriota J. Prat, montaron un aparato análogo susceptible de ser construido en serie. A la vista de los resultados prácticos, el financiero James Densmore se asoció a la empresa y al año siguiente la gran manufactura de armas Remington comenzó la producción de máquinas en serie. Sholes, verdadero padre de la máquina de escribir, murió pobre.

Desde el despertador que suavemente nos espabila hasta el automóvil ya programado que trasladará al empleado del futuro a las supertecnificadas oficinas o industrias, todo estará controlado, regido e interconectado por una tupida red de ordenadores centrales, terminales y microordenadores.

Los futuros hogares estarán presididos por este aparato que llevará la organización familiar, administrará sus bienes y con una programación lógica tomará o al menos nos propondrá las más personales decisiones.

En conexión con bancos, supermercados, agencias de información, videotecas, nuestros hijos conocerán una auténtica revolución. El desarrollo de la microelectrónica, los fabulosos "chip" del tamaño de una lenteja, que albergan en su interior las funciones equivalentes a un circuito convencional de cincuenta mil transistores, conducen a equipos tan pequeños como queramos imaginar.

El próximo "boom" de la electrónica, después de la televisión en color y la fiebre del video, será sin duda el ordenador familiar.

8.–ESTRUCTURA PROPOSICIONAL. ALGEBRA DE BOOLE

Siendo el conjunto p de todas las proposiciones, definimos la disyunción y la conjunción como operaciones internas, resulta que el conjunto $(p, \vee, \wedge)$ alcanza la estructura de álgebra de Boole por reunir las siguientes propiedades:

– **Asociativa:**

$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

– **Conmutativa:**

$p \vee q = q \vee p$

$p \wedge q = q \wedge p$

– **Idempotente:**

$p \vee p = p$

$p \wedge p = p$

– **Simplificativa:**

$(p \vee q) \wedge p = p$

$(p \wedge q) \vee p = p$

– **Complementariedad:** Para cualquier proposición p existe siempre su negación $\bar{p}$.

$\vee (p \vee \bar{p}) = \vee$

$\vee (p \wedge \bar{p}) = F$

– **Distributiva:**

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

– **Leyes de Morgan:**

$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$

$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$

De lo que se deduce que el conjunto $(p, \vee, \wedge)$ es un retículo por cumplir las propiedades Asociativa, Conmutativa, Idempotente y Simplificativa, y, además, retículo complementario y distributivo por cumplirse estas propiedades, luego alcanza la estructura de Algebra de Boole.

NOTA.–Todas las propiedades expuestas admiten, si se desea, una comprobación sencilla, sin más que hacer para cada una de ellas la correspondiente tabla de verdad y observar que los resultados de ambos miembros de cada propiedad planteada coinciden.

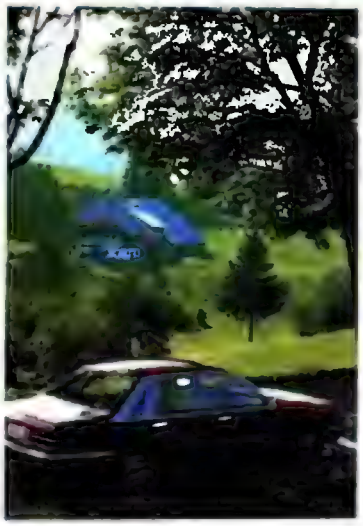
TEMA 10

SISTEMAS DE NUMERACION

INDICE

1.—INTRODUCCION.
2.—TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS SITEMAS DE NUMERACION. DESCOMPOSICION POLINOMICA DE UN NUMERO.
3.—TRANSFORMACION A DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACION.
A.—Paso de un número en base decimal a otro en base cualquiera.
B.—Paso de un número en base cualquiera a otro en base decimal.
C.—Paso de un número en base cualquiera a otro en base cualquiera.

TEMA 10



Dos pueblos se encuentran a 120 km. de distancia. La carretera que los une es completamente llana; por lo tanto, un automóvil que va de uno a otro a 80 km. por hora y a velocidad uniforme tarda una hora y media en realizar el recorrido.

Otros dos pueblos se encuentran a la misma distancia, pero 60 km. son de subida y otros 60 km. son de bajada. El mismo automóvil recorre los primeros 60 km. a una velocidad de 40 km. por hora y los segundos a 140 km. por hora. ¿Tardará más en hacer este recorrido, igual o menos que en el primer caso? ¡Cuidado, es muy fácil!

SOLUCION: Creemos que tardará más, ya que solamente en la cuesta arriba que son 60 km. y a una velocidad de 40 km. por hora ya tardará una hora y media. La velocidad de bajada ya nos importa poco.

SISTEMAS DE NUMERACION

1.–INTRODUCCION

Se entiende por sistema de numeración a la representación simbólica que puede adoptar cualquier número natural (entero positivo).

Esta representación se puede expresar mediante letras o propiamente números.

Los sistemas de numeración han ido evolucionando a través del tiempo, procurando adaptarse a las circunstancias y a las necesidades de cada momento y de cada técnica.

Es de todos conocido el **sistema de numeración romano**, que utiliza siete símbolos representados por las letras:

I = 1
V = 5
X = 10
L = 50
C = 100
D = 500
M = 1000

También existe el archiconocido **sistema de numeración decimal**, que es el que usamos comúnmente y que consta de diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Sin embargo, existen otros sistemas también muy usados en la actualidad, como por ejemplo el **sistema de numeración binario**, que se utiliza profusamente en los cerebros electrónicos y que consta de dos símbolos: 0, 1.

Hemos citado los sistemas de numeración más importantes y de mayor trascendencia; sin embargo, con los desarrollos que se van a exponer a continuacion podemos representar cualquier número en cualquier sistema de numeración que elijamos.

2.–TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS SISTEMAS DE NUMERACION. DESCOMPOSICION POLINOMICA DE UN NUMERO

Cualquier sistema de numeración utiliza un concepto importante que recibe el nombre de base.

Base de un sistema de numeración es la cantidad de símbolos que utiliza el sistema.

Ej.: El sistema de numeración decimal (base 10) utiliza diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ej.: El sistema de nuemración binario (base 2) utiliza dos símbolos: 0, 1.

Ej.: El sistema de numeración octal (base 8) utiliza ocho símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Es deducible que cualquier sistema de numeración no puede tener símbolos o números iguales o superiores a los que expresa su base.

Ej.: No es posible que el número 210536 esté expresado en el sistema de numeración de base cinco, ya que contiene símbolos, como el 5 y el 6, iguales o superiores a la base del sistema que se indica.

Ej.: Pensemos que en el sistema de numeración decimal (base 10) no utilizamos símbolos distintos a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para representar cualquier número.

En todos los sistemas de numeración es necesario indicar o exponer la base en la que está dado un número en cuestión, excepto cuando el número está representado en el sistema decimal (base 10) en donde es necesario especificar la base del sistema de numeración.

Ej.: $3204_{|6}$ (Está en base 6).

Ej.: 854 (no se indica base, luego está en el sistema decimal).

NOTA.—El empleo de sistemas de numeración de bases superiores a la decimal tiene el inconveniente de tener que emplear muchas cifras distintas para la representación de un número.

Y el empleo de sistemas de numeración con bases más pequeñas posee la desventaja de que números altos implican la utilización de gran cantidad de cifras, aunque sean iguales muchas de ellas.

Así, pues, el teorema fundamental de los sistemas de numeración indica que cualquier número N = ... e d c b a, puede descomponerse de forma única según la expresión siguiente:

$$N = \ldots\ldots\ldots e\ d\ c\ b\ a$$

$$N = a\ B^0 + b\ B^1 + c\ B^2 + d\ B^3 + e\ B^4 + \ldots\ldots$$

en donde B es la base del sistema de numeración utilizado elevada a 0, 1, 2, 3 ....., teniendo en cuenta que la primera cifra del número, empezando siempre por la izquierda, le corresponde el lugar 0, y la segunda por la izquierda el lugar 1, y asi sucesivamente hasta agotar las cifras del número.

El ser humano se pasa una décima parte de su vida comiendo, por lo cual se puede afirmar que llegando a los 70 años ha dedicado 7 años a masticar y digerir. La ciencia llega además a mantener que la tierra se halla constituida de tal manera que podría alimentar diariamente a 5.300 millones de seres, o sea, el doble de la población actual del mundo. De lo que resulta que si hay quienes padecen hambre no es por culpa de la madre naturaleza.

El hombre ha hecho lo posible para convertir en alimentos todo cuanto hay en la tierra. En todo el Oriente se considera un plato exquisito las abejas asadas, de una clase especial, de las que no dan miel. De otra parte, los nómadas del desierto de Gobi muestran sus preferencias alimentarias por una especie de sapo gigante. Las tribus dincas toman asadas serpientes y colas de cocodrilo en los banquetes festivos.

En el Sur de Australia se emplean hormigas para preparar un refresco que aplaca muy bien la sed.

También el corazón de león es comestible, y de tal manera que en la ciudad del El Cabo funciona una fábrica de productos alimenticios, que es única en su género; fabrica conservas de león que se envían a los más exigentes gastrónomos de todo el mundo.

En Australia, y en la actualidad, existen algunos indígenas que viven igual que nuestros antepasados. Viven al margen del tiempo y se pueden pasar de zonas supercivilizadas a reservas situadas en las zonas desérticas del Kimberley, donde el hambre los acosa. No practican la agricultura; se mantienen de la caza, de la pesca y de recolectar frutas silvestres; no conocen el arco ni las flechas. Sus principales armas son el venablo y los cuchillos de piedra. Sin embargo su arma más típica es el bumerang, arma arrojadiza en forma de V muy abierta. Si se maneja con maestría, vuelve al lugar de donde se lanzara caso de no acertar en el blanco.

Lo emilean principalmente para cazar pájaros.

El bumerang es sin duda un útil muy notable. Su característica de describir círculos en el aire se debe a la forma especial del arma con un lado redondeado y otro plano. Su construcción es fruto de la observación y del arte, transmitido generación a generación.

En países civilizados existen asociaciones deportivas que los construyen calculando matemáticamente sus propiedades, desarrollando perfiles y formas, y que, pese a estos medios, no logran superar el rendimiento de los fabricados por los indígenas.

Ej.: El número 124 en base 10, expresado en forma polinómica en el sistema decimal:

$$124 = 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2 = 4 + 20 + 100 = 124$$

Ej.: Expresar polinómicamente el número 0,63 en base 10:

$$0{,}63 = 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 0{,}6 + 0{,}03 = 0{,}63$$

3.–TRANSFORMACION A DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACION

Nuestra costumbre es efectuar operaciones y representar los números en el sistema de numeración decimal (base 10).

Vamos, pues, a estudiar cómo se pueden representar los números en diferentes sitemas de numeración.

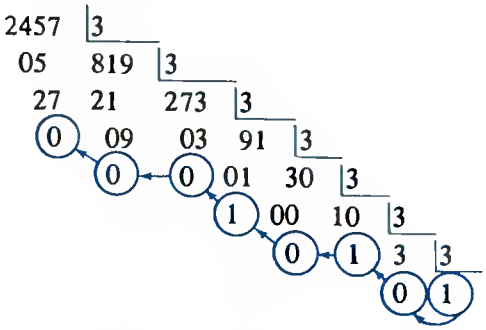
A.–Paso de un número en base decimal a otro en base cualquiera.

Se comienza a dividir el número dado en el sistema decimal entre la base del nuevo sistema al que queramos cambiar.

Se efectúan todas las divisiones necesarias en las que la nueva base actúa como divisor, hasta que aparezca una división en la que el resto sea menor que el divisor, es decir, menor que la nueva base.

El número pedido en la nueva base es el último cociente seguido de todos los restos obtenidos en orden inverso.

Ej.: Poner en base 3 el número 2437 en base decimal:



$$2457 = 10101000\ |_3$$

B.–Paso de un número en base cualquiera a otro en base decimal.

Este es el caso contrario al anterior.

Existen dos procedimientos de cálculo:

– Por la forma polinómica. Consiste en poner el número en forma polinómica y efectuar todas las operaciones en base 10.

Ej.: Pasar el número $3610_{|7}$ a base decimal:

$$3610_{|7} = 3 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0 =$$
$$= 1029 + 294 + 7 + 0 = 1330$$

—**Por la regla de Ruffini.** Aunque no conocemos aún esta regla, se expone como procedimiento de cálculo para estos casos. En temas inmediatos tendremos posibilidad de estudiarla ampliamente.

Se aplica dividiendo las cifras del número motivo de cambio entre la cifra que indica la base del número en cuestión. El resto de división por Ruffini es el número en la base decimal.

Ej.: Pasar el número $3610_{|7}$ a base decimal:

	3	6	1	0
7		21	189	1330
	3	27	190	1330

C.—Paso de un número en base cualquiera a otro en base cualquiera.

Este caso lo podemos considerar como una mezcla de los dos anteriores.

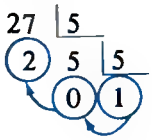
Procederemos de la siguiente forma: Primeramente pasaremos el número en cuestión a la base 10 y a continuación lo cambiaremos a la base que nos pedían.

Ej.: Poner el número $11011_{|2}$ en base cinco.

Primeramente pasamos el número a base 10, mediante la forma polinómica:

$$11011_{|2} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$= 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$$

A continuación, su equivalente en base 10 que es el 27 lo pasamos a la base cinco.



$102_{|5}$

con lo que resulta:

$$11011_{|2} = 27 = 102_{|5}$$

CURIOSIDADES

Decidle a un amigo que escriba un número de tres cifras (por ejemplo, 385). Dile que sume los valores absolutos de estas cifras (3 + 8 + 5 = 16) y que el resultado lo reste del número de 3 cifras (385 − 16 = 369). Ahora viene lo difícil. Decidle que del número resultante borre la cifra que quiera y que te diga sólo las cifras restantes y tú le dirás inmediatamente la cifra borrada aunque no sepas el número pensado y sin haber visto las operaciones ni el número primitivo. Si del número resultado borra el 3, tendremos 9 + 6 = 15 y del 15 al 18 van **tres** que es la cifra borrada. Si borra el 9, tenemos 3 + 6 = 9 y de 9 a 18 van **nueve**. Si la cifra borrada es 6 tenemos 9 + 3 = 12 y a 18 van **seis**. O sea, la suma de las dos cifras siempre se restan del inmediato superior divisible por 9. En este caso ha sido 18.

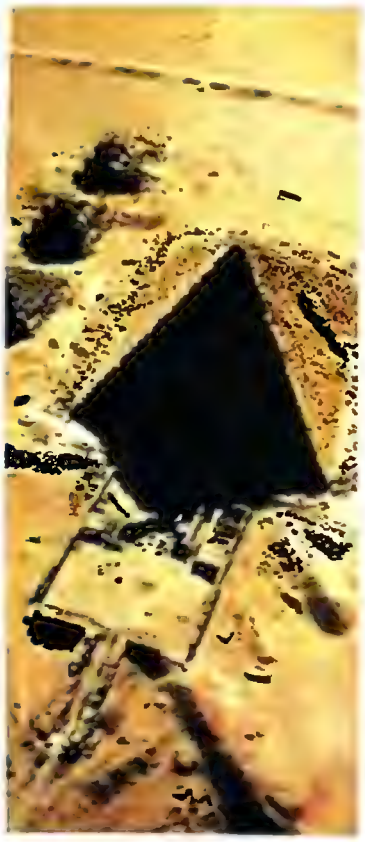
DEMOSTRACION

a = centenas; d = decenas; u = unidades.

100 c + 10 d + u − (c + d + u) = 99 c + 9 d = 9 (11 c + d) y como 9 (11 c + d) es divisible por 9. Por lo tanto al restarle a un número la suma de los valores de sus cifras debe salir siempre un número divisible por 9.

Dile a un amigo que escriba un número de tres cifras (con distintos números). Este número que lo ponga al revés y reste el menor del mayor. Luego con el resultado que nos dé hacemos la misma operación, o sea, ponemos el número al revés; entonces en vez de restar, los sumamos, y observaremos que nos dará siempre 1.089 y es el número que adivinamos que le dará. Veamos tres ejemplos:

1.°	876	198
	−678	+ 891
	198	1.089
2.°	127	
	721	594
	−127	+ 495
	594	1.089
3.°	100	
	100	099
	−001	+ 990
	099	1.089



Hace unos cinco mil años, los egipcios construyeron el mayor reloj del mundo, destinado a registrar el tiempo, dividiéndolo no sólo en horas sino también en días, estaciones e incluso en siglos. Se trata de la Gran Pirámide de Keops, edificada en el siglo XXVI a.C.; la mayor del grupo de las situadas a la orilla del río Nilo. Es la única superviviente de las siete maravillas de la antigüedad y probablemente el más antiguo observatorio del mundo.

En 1853 un astrónomo francés concluyó que la pirámide era un enorme reloj de sol. Había sido construida a tal escala, latitud y posición que podía indicar también el día del año. En los terrenos adyacentes a las caras norte y sur de la pirámide se habían dispuesto amplios pavimentos nivelados. En invierno la pirámide proyectaría su sombra sobre el suelo norte; en verano, la pulida cara sur del monumento reflejaría un triángulo luminoso en el suelo sur.

NOTA.—Aunque para operar números en las distintas bases existen procedimientos similares a las operaciones en base 10, que es la utilizada comúnmente por nosotros, después de lo visto para operar dos números cualesquiera (sumar, restar, multiplicar o dividir) es posible pasarlos a base 10, operándolos en esta base, y después pasarlos a la base en la que se quiera dar el resultado de la operación numérica.

Ej.: Operar $321_{|4}$ + $130_{|4}$

Pasamos los números a base 10:

$$321_{|4} = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 48 + 8 + 1 = 57$$

$$130_{|4} = 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 16 + 12 + 0 = 28$$

y los sumandos en base 10:

$$321_{|4} + 130_{|4} = 57 + 28 = 85$$

Pasamos el resultado 85 a base 4:

$$\begin{array}{r|l} 85 & 4 \\ 05\ \ 21 & 4 \\ (1)\ (1)\ 5 & 4 \\ \quad\ \ (1)\ (1) & \end{array} \qquad 1111_{|4}$$

Con lo que resulta:

$$321_{|4} + 130_{|4} = 1111_{|4}$$

Ej.: Operar $165_{|7}$ + $401_{|5}$ y expresar el resultado en base 6.

Pasamos los números a base 10:

$$165_{|7} = 1 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 49 + 42 + 5 = 96$$

$$401_{|5} = 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 100 + 0 + 1 = 101$$

Los sumamos en base 10:

$$165_{|7} + 401_{|5} = 96 + 101 = 197$$

Y pasamos el resultado 197 a base 6:

$$\begin{array}{r|l} 197 & 6 \\ 17\ \ 32 & 6 \\ (5)\ (2)\ (5) & \end{array} \qquad 525_{|6}$$

Con lo que resulta:

$$165_{|7} + 401_{|5} = 525_{|6}$$

Ej.: Escriban las tablas de sumar y multiplicar en el sistema binario:

Es evidente que en las tablas no deben existir cifras distintas a 0 y 1 que son los símbolos que utiliza el sistema binario (base 2).

+	0	1
0	0	1
1	1	10

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Ej.: Hallar el valor de la cifra X para que se verifique la igualdad $101001_{|3} = 20 \times 1_{|5}$.

Resulta evidente que dos números se pueden comparar cuando estén en la misma base, y en el caso de que sean iguales, sus cifras tendrán que ser exactamente iguales en dicha misma base.

Para compararlos, tendremos que pasar el $101001_{|3}$ a base 5, ya que $20 \times 1_{|5}$ a base 3 no podemos, por desconocer inicialmente el valor de la cifra x.

Pasaremos, pues, el $101001_{|3}$ a base 5, para ello tendremos antes que ponerlo en base 10 y de ésta pasar a base 5.

$$101001_{|3} = 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 =$$

$$= 243 + 0 + 27 + 0 + 0 + 1 = 271$$

$$\begin{array}{r|l} 271 & 5 \\ 21 \quad 54 & 5 \\ (1) \quad 04 \quad 10 & 5 \\ \quad\quad (4) \quad (0) \quad (2) & \end{array}$$

Así que resulta:

$$101001_{|3} = 271 = 2041_{|5}$$

(viene de la página anterior)

Los bloques del pavimento habían sido cortados con anchuras que correspondían a las proyecciones diarias de sombra y luz, verificadas a mediodía durante todo el año. Por ello, podían medirse los días y pronosticar con exactitud límites estacionales, como los equinoccios y los solsticios.

Esta gran pirámide podía haber sido un observatorio casi perfecto. El corredor que lleva a una cámara situada en el centro de la pirámide fue trazado con un ángulo de 26° 17', es decir, en la posición exacta para que se orientara hacia la estrella polar.

Esta pirámide, en fin, fue un alarde de ingeniería y un ejemplo de precisión matemática aplicada correctamente por los constructores de la época.

CURIOSIDADES

El suizo Von Haller fue una de las más grandes figuras de la ciencia aplicada. Poseía un enorme genio investigador. Destacó como anatomista, botánico, matemático y poeta. A los 9 años de edad estudiaba caldeo, escribía versos en latín. Se doctoró a los 19, y a los 29 años era ya profesor de la Universidad de Gotinga. Fundó jardines botánicos que él mismo trazó y calculó; realizó investigaciones sobre anatomía y bibliografía; escribió unos 1.300 artículos sobre ciencias varias.

Su mayor aportación a la ciencia consistió en su comprobación de que el dolor depende de los nervios. En una serie de 600 experimentos, muchos de ellos realizados sobre sí mismo, comprobó que determinados tejidos poseen la facultad de responder a estímulos específicos. Falleció en 1777, trabajando incansablemente y dedicando parte de sus últimos años a la lectura de la Biblia.

De lo que se deduce que:

$$2041_{|5} = 20 \times 1_{|5}$$

Luego la cifra x es 4, identificando:

$$x = 4$$

Ej.: Averiguar en qué base debe escribirse el número 127 del sistema decimal para que se obtenga $1002_{|x}$.

Pues bien, deberemos de poner los dos números en la misma base, con el detalle de que el 127 no lo podemos poner en base x, ya que ésta la desconocemos, pero sí podemos poner el $1002_{|x}$ en base 10, aun siendo desconocida la base x.

$$1002_{|x} = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0 =$$

$$= x^3 + 0 + 0 + 2 = x^3 + 2$$

Luego, como tienen que ser iguales:

$$x^3 + 2 = 127 \; ; \; x^3 = 125 \; ; \; x = \sqrt[3]{125} = 5$$

La base tiene que ser 5 (x = 5).

Ej.: Poner el número $0{,}42_{|7}$ en base 10.

Hay que tener en cuenta que al estar las cifras significativas a la derecha de la coma, los exponentes serán negativos.

$$0{,}42_{|7} = 4 \cdot 7^{-1} + 2 \cdot 7^{-2} = 4 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7^2} = \frac{4}{7} + \frac{2}{49} =$$

$$= \frac{28 + 2}{49} = \frac{30}{49} = 0{,}6122448$$

Ej.: Expresar en el sistema de base 12 el número 34216.

34216	12			
102	2851	12		
061	045	237	12	
016	091	117	19	12
(4)	(7)	(9)	(7)	(1)

$$34216 = 17974_{|12}$$

TEMA 11

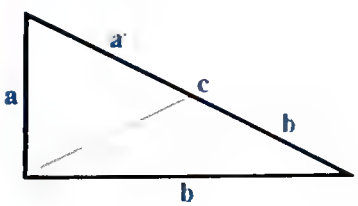
CIRCUITOS LOGICOS

INDICE

1.–INTRODUCCION.
2.–CONCEPTO DE CIRCUITO LOGICO.
3.–TABLAS DE RESPUESTA.
4.–ASOCIACION DE INTERRUPTORES. OPERACIONES.
A.–Asociación en serie.
B.–Asociación en paralelo.
C.–Interruptor contrario.
5.–CIRCUITOS EQUIVALENTES.
6.–ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS CIRCUITOS.

TEMA 11

Vamos a demostrar ahora el célebre teorema de Pitágoras, o sea, que en cualquier triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Partiendo de la base que un cateto es media proporcional de dicho cateto sobre ella, tendremos:

$$a^2 = c \cdot a'$$
$$b^2 = c \cdot b'$$

Sumando ambos términos, tenemos:

$$a^2 + b^2 = c\,(a' + b')$$

como $a' + b' = c$; vemos que

$$a^2 + b^2 = c \cdot c = c^2$$

Luego

$$a^2 + b^2 = c^2$$

CIRCUITOS LOGICOS

1.—INTRODUCCION

En el tema de lógica ya hemos visto cómo a las ideas, expresadas por proposiciones, se les ha dotado de unas operaciones que permiten obtener con facilidad el resultado lógico de un razonamiento.

También sabemos que cualquier proceso lógico admite dos resultados: verdadero o falso.

Posteriormente hemos estudiado los sitemas de numeración y hemos comprobado la existencia del sistema binario que utiliza también dos símbolos: 0 y 1.

Efectivamente, tanto en lógica como en el sistema binario se utilizan dos símbolos, que, aunque sean distintos, en cualquier momento podríamos hacer uso de una identificación entre ellos:

Valor lógico verdadero = 1.

Valor lógico falso = 0.

De lo que podemos deducir que ya se ha puesto a las proposiciones en contacto con los números.

Sin embargo la cuestión tiene más alcance, ya que ahora vamos a elegir un elemento físico (interruptor, transistor, relé, ...) que admita únicamente la posibilidad de tener dos estados. A uno de estos estados le vamos a poder asignar el símbolo 1 y al otro el símbolo 0.

Imaginemos que el elemento físico elegido es un interruptor de un circuito eléctrico.

Sabemos que los interruptores sólo admiten dos estados: cerrado (pasa la corriente) o abierto (no pasa la corriente). Pues bien, si a los estados abierto o cerrado les asignamos los símbolos 0 y 1 respectivamente, estaremos creando la forma lógica de estudiar un circuito, estudio que es el fundamento de cualquier cerebro o computador electrónico.

Definitivamente podemos precisar la importancia de los temas de lógica, sistemas de numeración y circuitos lógicos, que se han ido sucediendo hasta llegar a identificarse uno con otro y originar el principio del estudio matemático de un cerebro electrónico, y de los que podemos obtener las siguientes conclusiones:

Valor lógico verdadero = 1 = circuito cerrado (pasa corriente).

Valor lógico falso = 0 = circuito abierto (no pasa la corriente).

2.–CONCEPTO DE CIRCUITO LOGICO

En general el circuito lógico más elemental consta de los siguientes elementos:

– Pila, batería o generador. Es el elemento físico del circuito que suministra energía para su funcionamiento.

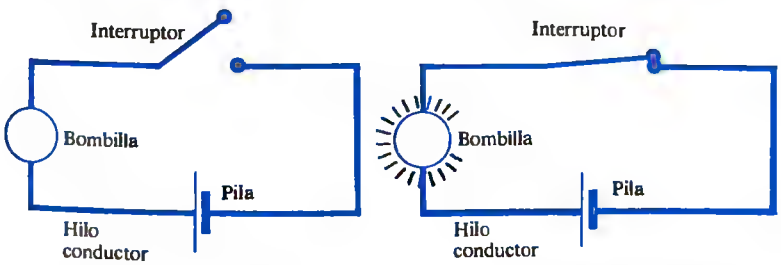
– Hilo conductor. Es el elemento físico del circuito a través del cual se canaliza el suministro de energía.

– Interruptor o conmutador. Es el elemento físico que controla el funcionamiento de un circuito, haciéndolo funcionar (interruptor cerrado) o inutilizándolo (interruptor abierto).

El objetivo que se persigue en el tema es el estudio de los circuitos desde el punto de vista de los interruptores (análisis lógico del circuito) y no desde el punto de vista eléctrico (análisis físico del circuito).

Pues bien, ya sabemos que cuando un interruptor esté abierto (no pasa corriente) le asignaremos a éste el valor lógico 0 y cuando esté cerrado (pasa corriente) el valor lógico 1.

A los interruptores los designaremos con letras minúsculas: a, b, c, ...



Interruptor abierto
No pasa corriente
Bombilla apagada

Interruptor cerrado
Pasa corriente
Bombilla encendida

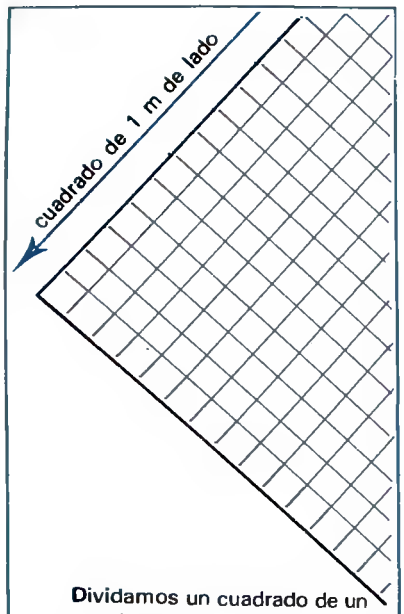
En fascículos anteriores hemos puesto los problemas de estos ladillos con las soluciones dentro del mismo. Cuando todo el mundo los veía decían que eran muy fáciles... al tener la solución.

Vamos ahora a cambiar de táctica; vamos a dejaros una semana para que busquéis la solución y veréis que no es tan fácil y tendréis que pensar.

Pensemos que estos ejemplos o "problemillas" sin fundamento casi son para desarrollar los métodos deductivos del alumno, ya que lo que pretendemos en esta obra es esto, además de enseñar matemáticas.

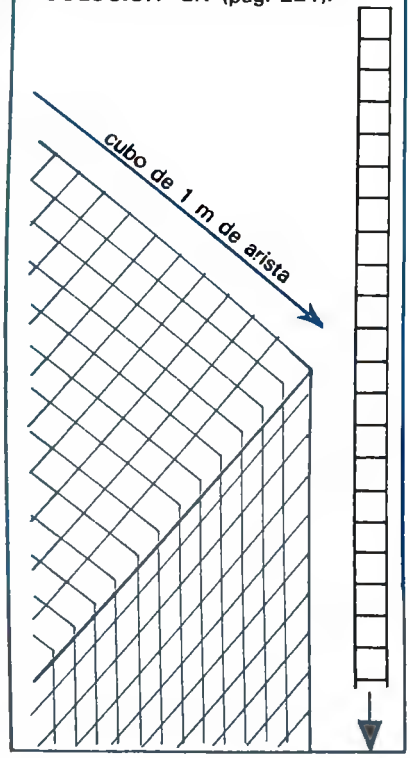
Por otra parte, hemos querido "dulcificar" (por llamarlo de alguna manera) la aridez de las matemáticas y hacerlas un poco más divertidas. Tenemos un sin fin de cartas que así lo atestiguan. De todas formas, si Vd. tiene alguna objeción que hacernos, le rogamos que nos lo comunique, así como si también tiene alguna experiencia curiosa, a excepción de alguna barbaridad en algún examen de un compañero. Esto no lo pondremos. No queremos de ninguna manera ridiculizar la figura de alguien, que demasiada desgracia tuvo para decir o poner algún disparate.

LA DIRECCION

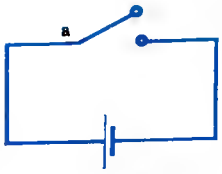
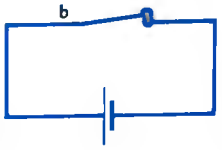


Dividamos un cuadrado de un metro de lado en cuadraditos de un milímetro. Hay que calcular, si colocáramos los cuadraditos cada uno al lado del otro, qué longitud tendría. Y también, si en vez de ser un cuadrado de un metro fuera un cubo de un metro de arista y dividiéramos cada una de las 6 aristas en cuadraditos de un milímetro y puestos uno al lado del otro qué longitud tendría.

SOLUCION EN (pág. 221).



Veamos el siguiente esquema:

Interruptor	Posición	Símbolo	Esquema del circuito	Funcionamiento del circuito
a	ABIERTO	0		NO PASA CORRIENTE
b	CERRADO	1		PASA CORRIENTE

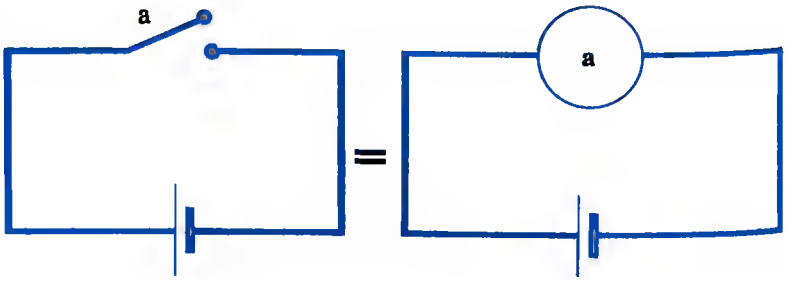
3.–TABLAS DE RESPUESTA

Se llaman así a los gráficos en forma de tabla que permiten decidir para qué posiciones de los interruptores de un circuito pasa o no pasa corriente por éste.

Las tablas de respuesta son similares a las tablas de verdad que utilizábamos en la lógica.

Cuando necesitemos confeccionar una tabla de respuestas deberemos de prepararla, adaptándola a la expresión del circuito que nos propongan.

Así colocaremos primeramente los interruptores originales del circuito cubriéndole todas las posibilidades entre ellos y continuaremos el encabezamiento horizontal de la tabla poco a poco hasta llegar a la expresión final del circuito que nos propongan. Para hacer una tabla de respuestas no es necesario saber si los interruptores están abiertos o cerrados, ya que lo que se propone es hacer el modelo lógico de un circuito, entonces para estos casos podemos representar a los interruptores mediante un círculo.



4.–ASOCIACION DE INTERRUPTORES. OPERACIONES

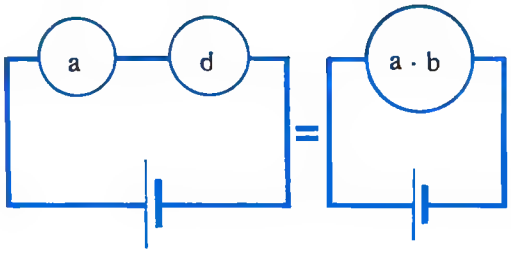
Vamos a estudiar las diferentes formas bajo las cuales se pueden colocar o disponer los interruptores en un circuito.

A.–Asociación en serie.

Se entiende por asociación en serie de dos interruptores a y b, a otro interruptor a · b que está cerrado cuando lo están ambos a la vez.

Sencillamente, cuando estando alineados uno va a continuación del otro.

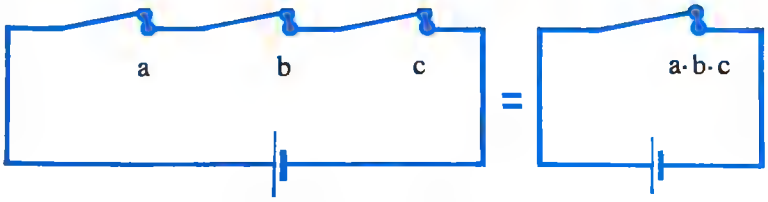
Vamos a estudiar la tabla de respuestas de esta asociación.



a	b	a · b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Obsérvese que es lógico que cuando varios interruptores están en serie deben de estar los tres cerrados para que pase corriente por el circuito.

Ej.:



a	b	c	a·b·c
1	1	1	1

Obsérvese que en este caso ya conocemos de antemano la posición de los interruptores, por ello la tabla de respuesta se reduce únicamente a una línea.

Por último, diremos que la asociación de interruptores en serie tiene semejanza con la operación conjunción de las proposiciones.

B.–Asociación en paralelo.

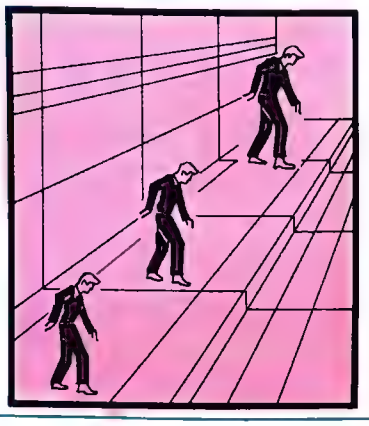
Se entiende por asociación en paralelo de dos interruptores a y b a otro interruptor a + b que está cerrado cuando lo están a o b o ambos a la vez.

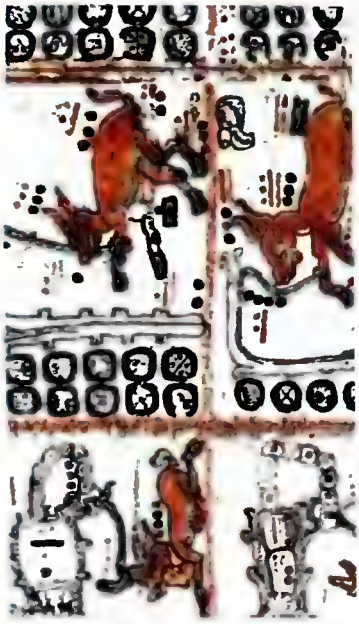
Sencillamente, cuando ambos están en distinta alineación.

Si observamos detenidamente el dibujo superior podemos ver una joven señorita o una venerable anciana, indistintamente, y las dos figuras que están superpuestas son comunicadas al cerebro al mismo tiempo, siendo éste el que separa una de otra. Por otra parte, y en la figura inferior, los tres jóvenes representados en ella tienen la misma altura, pareciendo ser más pequeño el que está en primer término.

Así podemos afirmar que las personas que confían solamente en lo que ven sus ojos harían bien en comprobar que este sentido no les engaña.

El sentido de la vista, aun en buenas condiciones, se basa en el perfecto funcionamiento del cristalino, lente elástica biconvexa con un poder de refracción de 11 dioptrías y una acomodación de 14 dioptrías a los 10 años de edad, pero extremadamente sensible al paso de los años y que sometida a reconocimiento rara es la persona que no necesita alguna corrección óptica.





La Humanidad vivió durante siglos sin saber escribir; pero después con objeto de comunicarse los habitantes de una ciudad con otras inventaron unas formas de escritura.

Al principio dichas formas de escritura consistían en representar una imagen del objeto que se deseaba mencionar: a esto se le llama escritura ideográfica; el que quería indicar un animal representaba o dibujaba un animal.

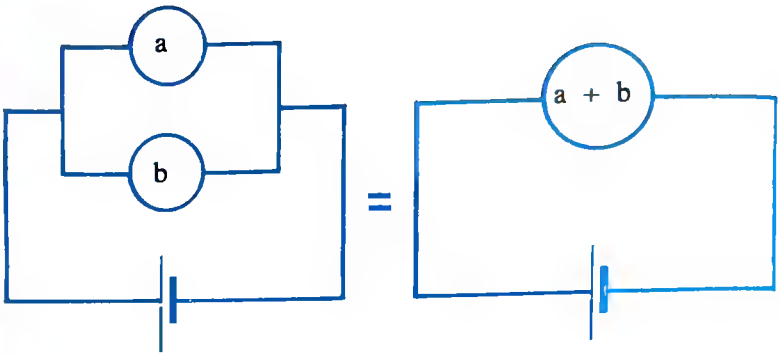
Posteriormente se fueron simplificando estos dibujos y a este tipo de escritura se la llamó jeroglífico: lo usaban los antiguos egipcios; cuneiforme, usada por los antiguos sumerios.

Como cosa curiosa podemos indicar que algunos de estos signos son todavía utilizados por chinos y japoneses.

Posteriormente, y para mejor explicación, los fenicios inventaron el Alfabeto (parte de este alfabeto se debe a los griegos). A cada letra le corresponde un sonido, aun existiendo excepciones en diversas consonantes, como la C delante de A, O, U que se pronuncia como K; sin embargo, delante de la E y de la I se pronuncia como Z.

Igual existen los casos de la G, la H, la R, con excepciones peculiares que no viene al caso enumerar.

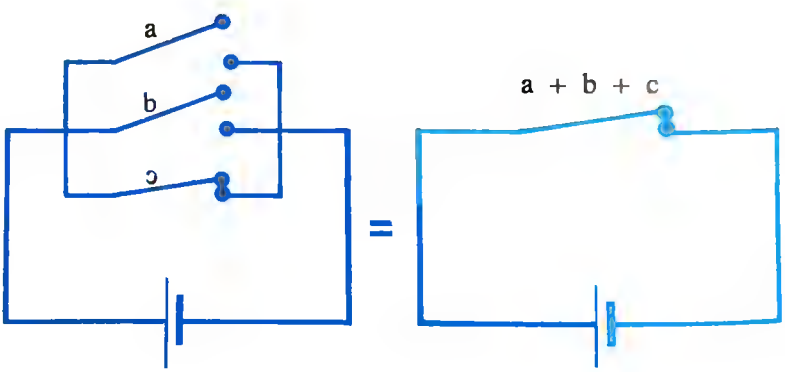
Vamos a estudiar la tabla de respuestas de esta asociación:



a	b	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

No hay duda que cuando varios interruptores están en paralelo, es suficiente que uno de ellos esté cerrado para que pase corriente por el circuito.

Ej.:



a	b	c	a + b + c
0	0	1	1

Obsérvese que en este caso ya conocemos de antemano la posición de los interruptores, por ello la tabla de respuestas se reduce únicamente a una línea.

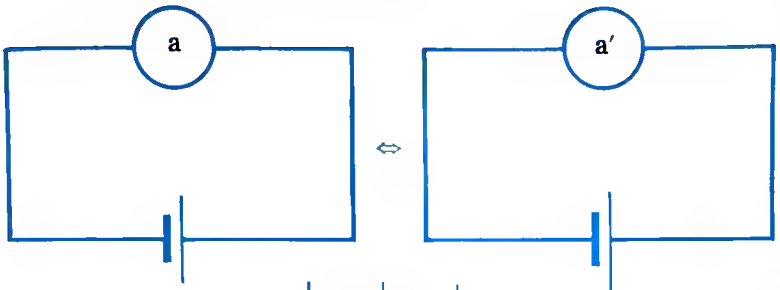
Finalmente, observemos que la asociación de interruptores en paralelo tiene similitud con la operación disyunción de las proposiciones.

C.–Interruptor contrario.

Llamaremos interruptor contrario de un interruptor a, a otro interruptor a′ que está abierto cuando a está cerrado y que está cerrado cuando a está abierto.

Sencillamente, dos interruptores son contrarios cuando están en posiciones opuestas.

Estudiemos la tabla de respuestas.



a	a′
0	1
1	0

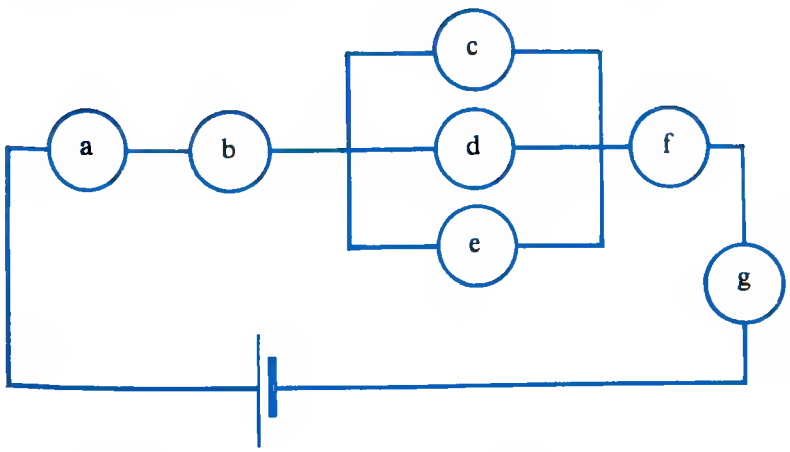
El interruptor contrario es un concepto que tiene semejanza con la operación negación de las proposiciones.

5.–CIRCUITOS EQUIVALENTES

Desde el punto de vista de los interruptores, dos circuitos son equivalentes cuando poseen la misma tabla de respuestas.

Hay que hacer notar que la equivalencia de circuitos es semejante a la equivalencia de proposiciones en la lógica.

Ej.: Averiguar cómo están colocados los interruptores del circuito siguiente y exponer la expresión final del circuito.



Colocados en serie: a, b, c + d + e, f, g.

Colocados en paralelo: c, d, e.

EL NUDO

No vamos a ver aquí aquel famoso "Nudo Gordiano"; sí, aquel que no había nadie en el mundo que fuera capaz de deshacerlo hasta que llegó Alejandro Magno y lo deshizo de un golpe de espada. Esta solución por medios expeditivos es algunas veces conveniente.

Aquí lo que vamos a ver es el otro nudo, "el nudo marino". El "nudo marino" es la unidad de velocidad que se utiliza en la navegación y que equivale a **1.852 m por hora**, o sea, a **una milla marina por hora**.

Cuando un buque va, por ejemplo, a 15 nudos en un momento dado, y no a 15 nudos por hora.

Diferenciemos dos cosas:

1.º) La "milla marina" son **1.852 m.**

2.º (Repetimos) El "nudo marino" es la unidad de velocidad, y que equivale a 1.852 m POR HORA o, lo que es lo mismo, a una velocidad de UNA MILLA marina por hora.

La DICOTOMIA afirma que es imposible recorrer una distancia dada. O sea, el problema del tirador y la flecha que nunca llega a su diana. Un espacio dado se divide por la mitad; lo que queda se divide a su vez en otra mitad, y la que queda a su vez en otra mitad y así sucesivamente.

1/2 1/4 1/8 1/16

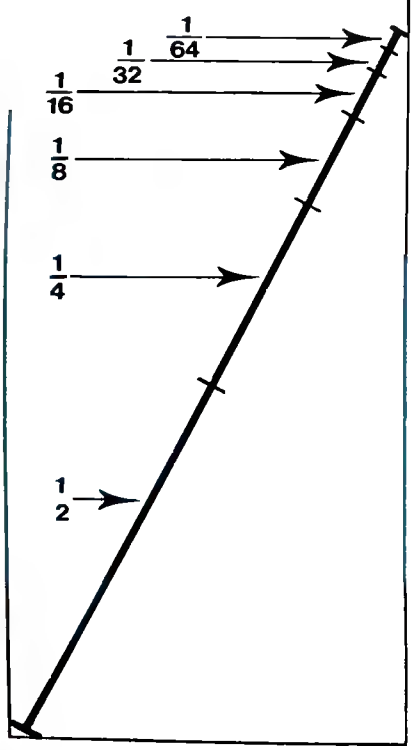
1/32 1/64

O sea, formaremos una serie geométrica infinita.

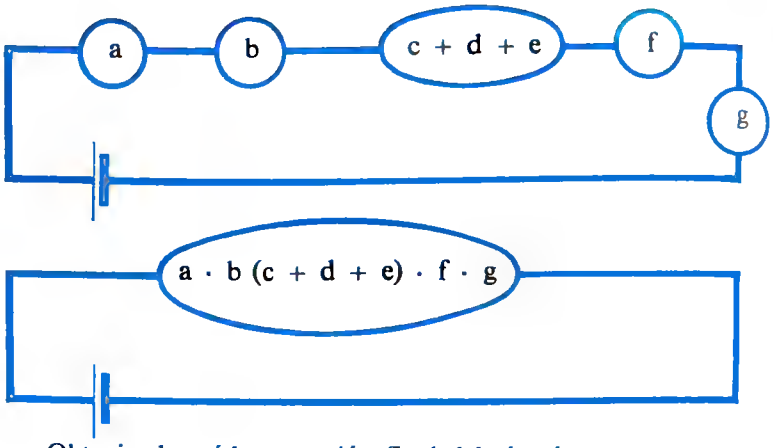
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+$$

$$+\frac{1}{128}+\ldots\rightarrow 1$$

Quiere decirse también que entre el cero y el uno existe una serie de números (por supuesto, quebrados o decimales) infinitos. Esto es para estudiar dos números. ¿Qué será para estudiar todos?



Para llegar a la expresión final del circuito tendremos que recorrer las siguientes formas de éste.

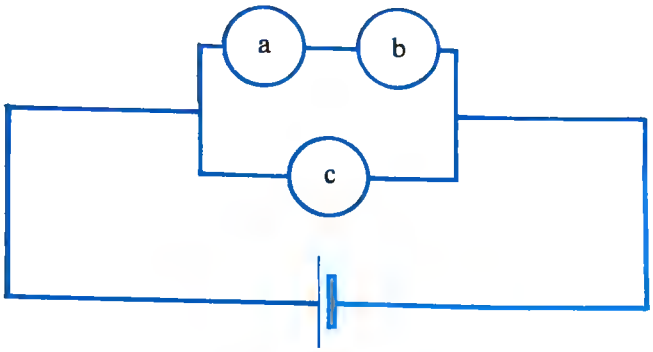


Obteniendo así la expresión final del circuito que nos proponen : a · b · (c + d + e) f ·g.

Ej.: Dibujar el circuito correspondiente a la expresión (a · b) + + c.

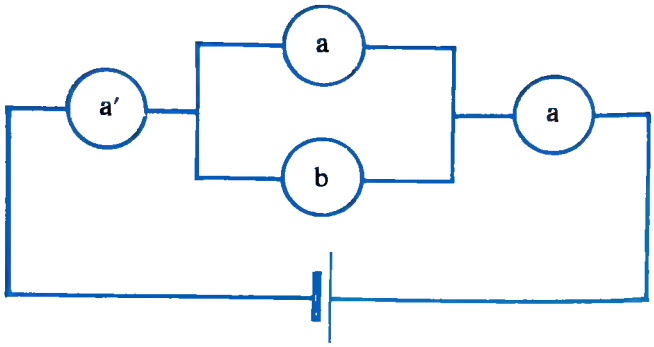
Para dibujar el circuito tendremos que darnos cuenta que como a y b están multiplicándose es que estarán dispuestos en serie y a · b y c como se están sumando estarán dispuestos en paralelo.

Así, pues, el circuito es de la forma:



Ej.: Dibujar el circuito correspondiente a la expresión a′ · (a + b) · a y hacer su tabla de respuestas.

Como a′, a + b y a están en serie por estar multiplicándose, y a y b están en paralelo por estar sumándose, el circuito es:

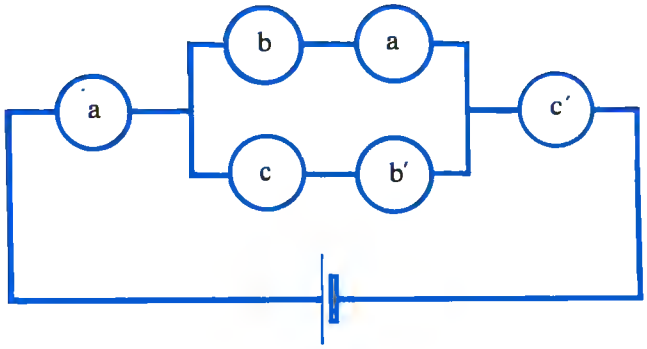


Para hacer la tabla de respuestas tendremos que confeccionar antes el encabezamiento horizontal y todas las posibilidades entre los interruptores originales, es decir, la zona remarcada de la tabla.

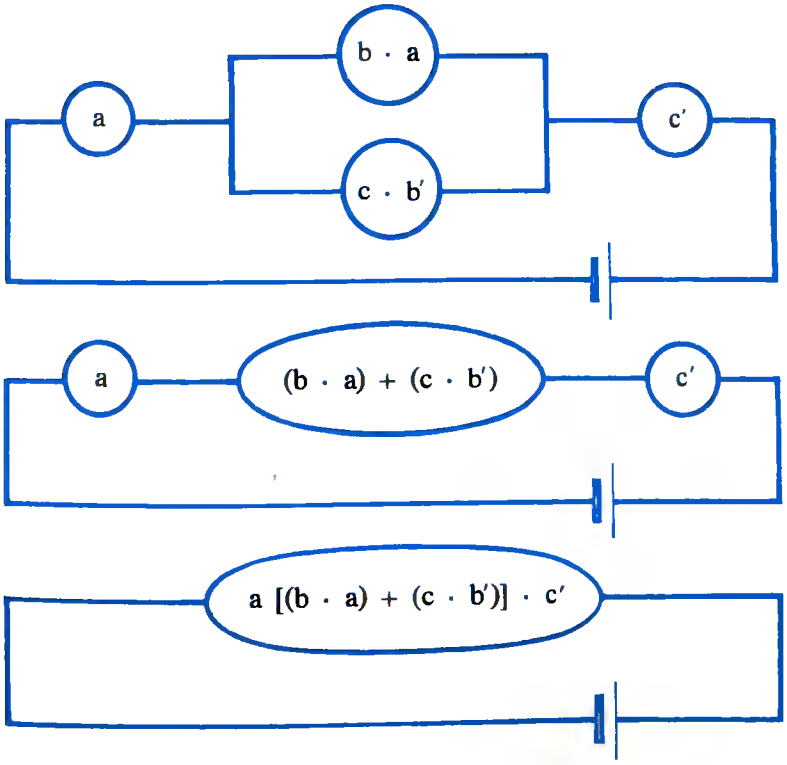
a	b	a′	a + b	a′ (a + b) a
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

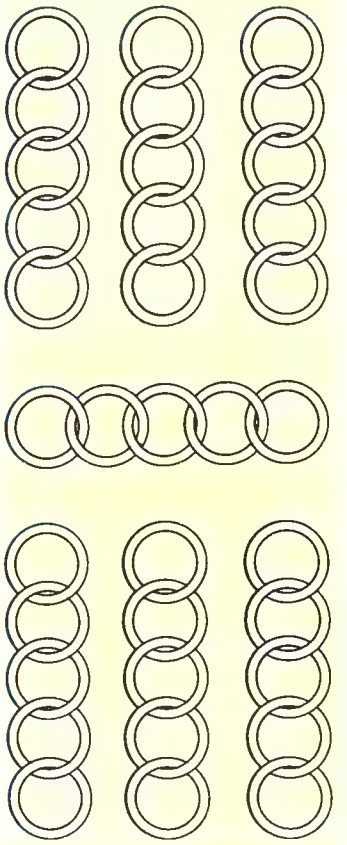
Como la tabla de respuestas del circuito reproduce en todos los casos valores 0, es que el circuito en cuestión está siempre abierto.

Ej.: Escribir la tabla de respuestas del circuito siguiente:



Para ello, tendremos antes que fabricarnos la expresión final del circuito pasando por las siguientes etapas:





A un herrero le entregaron siete trozos de cadena de cinco eslabones cada trozo para que los uniera.

El trabajo, por supuesto, tenía que realizarlo lo más cómodamente (hay que tener presente que en el punto de unión hay que abrir un eslabón y después cerrarlo), o sea, con el mínimo esfuerzo o trabajo.

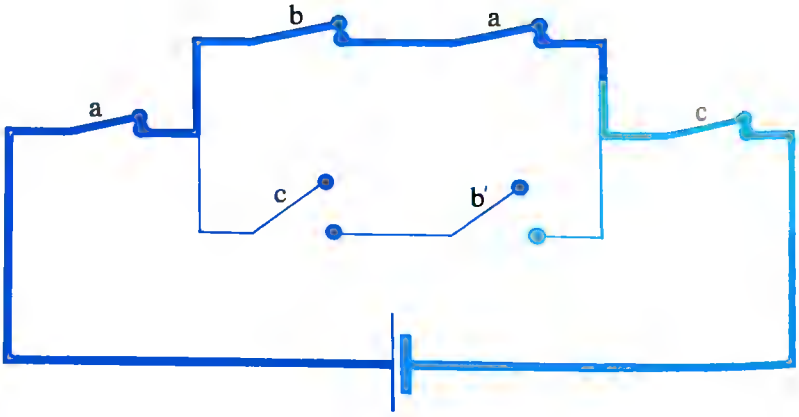
¿Cómo realizarlo?

LA SOLUCION EN (pág. 221).

Teniendo la expresión final del circuito, ya estamos en condiciones de confeccionar su tabla de respuestas.

a	b	c	b · a	b′	c · b′	(b · a) + (c · b′)	c′	a · [(b · a) + (c · b′)] · c′
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0

A la vista de la tabla de respuestas, únicamente pasa corriente por el circuito cuando el interruptor a esté cerrado, el (b · a) + + (c · b′) esté cerrado y el c′ esté cerrado, que a título informativo corresponde por ejemplo al siguiente estado del circuito.



Obsérvese la línea de trazo grueso que mantiene el circuito cerrado según las características que formulan los interruptores.

Ej.: Averiguar si los circuitos definidos por la expresión (a + b)′ y a′ · b′ son equivalentes.

En la misma tabla de respuestas formularemos el desarrollo de las dos expresiones.

Importantísima fue la invención del papel. En la Edad Media, hacia el siglo XI, se introdujo en Europa. Ya había sido inventada por los chinos en una época no determinada; lo fabricaban en un principio con borra de seda y posteriormente con trapos y fibras vegetales, así como con bambú y paja de arroz.

El secreto de la fabricación de este precioso material fue revelado a los árabes por prisioneros chinos, y realmente fueron los árabes los introductores en Europa.

Al principio se utilizaban los trapos; hoy día sólo los papeles para dibujo o empleados en trabajos de mucha calidad se obtienen de esta materia.

En 1756 empezó a emplearse en Alemania la paja, pero resultaba de muy mala calidad y no era útil nada más que para embalajes. Se utilizó posteriormente el serrín y las fibras vegetales, pero la principal dificultad era la decoloración de estas pastas para obtener papel blanco. Esto se consiguió en 1774 con el uso del cloro. La máquina para fabricar papel continuo fue inventada por Robert en 1798 y el cilindro secador en 1821 por Crompton.

a	b	a + b	(a + b)′	a′	b′	(a′ · b′)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Obsérvese que las tablas de respuesta correspondientes a las expresiones de los circuitos son iguales (véanse en la tabla las columnas remarcadas), luego los circuitos son equivalentes.

6.–ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS CIRCUITOS

Si consideramos el conjunto de todos los circuitos, y a los interruptores de éstos los dotamos con las operaciones o leyes de composición interna: + (asociación en paralelo) y · (asociación en serie), vamos a exponer las propiedades que cumplen para clasificar el tipo estructural que definen.

- Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Conmutativa: $a + b = b + a$
  $a \cdot b = b \cdot a$
- Idempotente: $a + a = a$
  $a \cdot a = a$
- Simplificativa o absorción: $(a + b) \cdot a = a$
  $(a \cdot b) + a = a$

La etapa más prodigiosa en el crecimiento del hombre es sin ninguna duda la que transcurre entre la fecundación y el nacimiento. En este tiempo, el embrión humano recientemente creado está formado por una célula de 140 micrones de diámetro, con un peso de 1,5 millonésimas de gramo.

En él, y pese a su microscópico tamaño, lleva impreso todo un maravilloso mensaje hereditario cuyas variadas combinaciones producen según leyes fijas y determinadas los caracteres del nuevo ser.

En nueve meses este peso se multiplica por dos mil millones y en el adulto se multiplica por cincuenta millones aproximadamente. El crecimiento se condiciona por un proceso doble: unas células se multiplican y otras aumentan su volumen. Estas dos modalidades intervienen en proporciones variables, según el órgano a formar.

El cerebro se desarrolla a gran velocidad y en cambio el esqueleto necesita por término medio 15 años para llegar a su madurez.

Estas formas de actuar y que determinan el crecimiento total del individuo dependen de unos factores no muy conocidos y que se conocen como factores del crecimiento.

Gracias a este mensaje preimpreso ya al nacer, se producirá con asombrosa velocidad o con calculada lentitud la generación de las células, su crecimiento, su diferenciación, y la organización con destino final de tejidos, órganos, huesos, etc., alcanzando toda su plenitud al final de la pubertad.

Los gráficos se utilizan para hacer representaciones visuales de procesos matemáticos numéricos o estadísticos, de forma tal, que las líneas o los dibujos muestren la relación existente entre dichos valores.

En matemáticas son muy usados para representar variaciones entre distintos porcentajes, cantidades, etc. La imaginación de los dibujantes puede dar multitud de formas a estos esquemas, pero en su base se pueden considerar como tipos clásicos. El de línea de magnitudes, referidas a dos coordenadas en ángulo recto; otro es el gráfico de columnas, que sirve para comparar la altura de magnitudes, este puede ser también de bandas horizontales, y el tercero es el gráfico circular que se usa para poner de relieve las cantidades relativas que se relacionan con un todo, en este caso el círculo.

Los gráficos son una ayuda para comprender rápidamente una situación; pero en general no son tan precisos como los cuadrados numéricos, y son susceptibles de producir errores de percepción visual.

– Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

– Complementariedad. Como ya sabemos que existe el concepto de interruptor contrario, no hay duda que para cualquier interruptor de un circuito existe su complementario o contrario.

$a + a' = 1$ (pasa corriente siempre al poner dos interruptores contrarios en paralelo ≡ Universal).

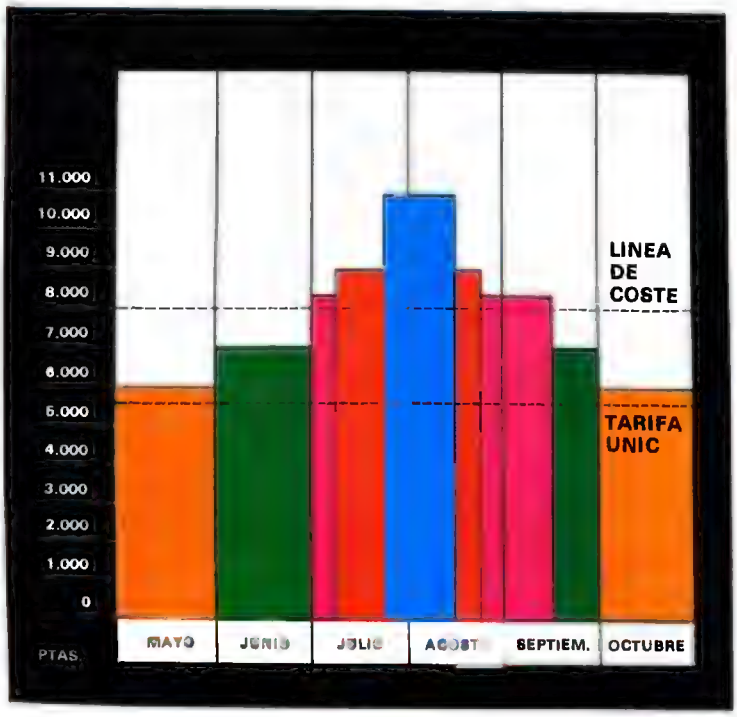
$a \cdot a' = 0$ (nunca pasa corriente al poner dos interruptores contrarios en serie ≡ Vacío).

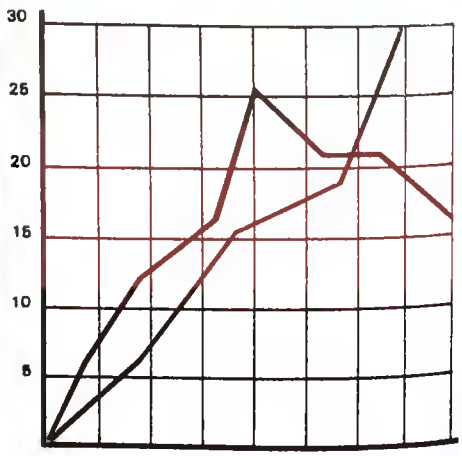
La existencia de la complementariedad decide la comprobación de las leyes de Morgan.

$$(a + b)' = a' \cdot b'$$
$$(a \cdot b)' = a' + b'$$

Definitivamente, a la vista de las propiedades que cumplen los circuitos para con los interruptores y con las operaciones prescritas decidiremos que poseen una estructura de retículo distributivo y complementario, es decir, forman un álgebra de Boole.

NOTA.—La comprobación de todas las propiedades estudiadas se pueden hacer con facilidad, haciendo una tabla de respuestas para cada miembro de cada propiedad y observando que son exactamente iguales.





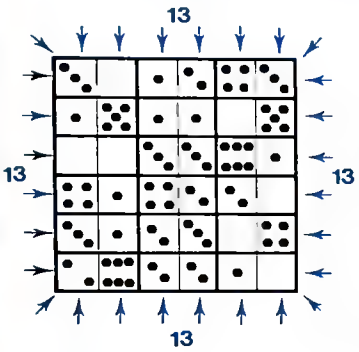
TEMA 12

FRACCIONES

INDICE

1.–CONCEPTO DE FRACCION.
2.–TIPOS DE FRACCIONES.
   A.–Número mixto.
   B.–Fracción propia.
   C.–Fracción impropia.
   D.–Fracción generatriz.
   E.–Fracción generatriz decimal exacta.
   F.–Fracción generatriz periódica pura.
   G.–Fracción generatriz periódica mixta.
3.–PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES.
4.–REDUCCION DE FRACCIONES A MINIMO COMUN DENOMINADOR.
5.–OPERACIONES CON FRACCIONES.
   A.–Suma y diferencia.
   B.–Producto.
   C.–Cociente.
6.–CONSTRUCCION DE LOS CONJUNTOS DE NUMEROS.
   A.–Construcción del conjunto de los números enteros.
   B.–Construcción del conjunto de los números racionales.

TEMA 12



CURIOSIDADES

Cuadrado mágico de fichas de dominó.

Con las fichas del dominó se pueden formar multitud de combinaciones para realizar juegos. Aquí hemos puesto, como curiosidad, las fichas de tal modo que sumadas horizontal, vertical y diagonalmente suman 13. Observamos cómo las dos fichas del centro (el 3-3 y el 4-2) suman 6. También podían ser el 3-4 y el 2-3, el equilibrio igualmente existiría, ya que 4-3 y 2-3 el promedio también es 6.

FRACCIONES

1.–CONCEPTO DE FRACCION

Se entiende por fracción a dos números (enteros positivos o negativos, fraccionarios positivos o negativos, decimales, etc.) tal que uno de ellos es dividido por el otro, de forma exacta o no exacta.

Es decir, que una fracción lo que plantea es una división que en cierto modo no se efectúa.

Al dividendo de esta división se le llama **numerador** y al divisor se le aprecia como **denominador.**

Cuando este dividendo (numerador) y este divisor (denominador) se les representa separados por una rayita, se entiende que hemos formado una fracción o también llamado vulgarmente un quebrado.

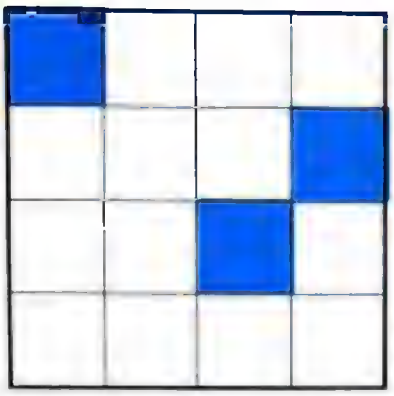
$$a \,\lfloor b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \begin{array}{l} \rightarrow \text{NUMERADOR} \\ \rightarrow \text{DENOMINADOR} \end{array} \Big\} \text{FRACCION}$$

Ej.: Son fracciones las siguientes expresiones:

$$\frac{5}{3} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{-3}{8} \; ; \; \frac{1{,}72}{3{,}51} \; ; \; \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}} \; ; \; \ldots$$

El denominador de una fracción indica el número de partes en que se ha dividido la unidad y el numerador indica la cantidad de partes que hemos tomado de esa unidad, definida inicialmente.

Ej.: Imaginemos un cuadrado que lo hemos dividido en 16 partes iguales y queremos representar la fracción que indica las zonas azules de la figura adjunta:



Es evidente que la unidad en este caso es el cuadrado como ente o elemento geométrico único.

Este cuadro o unidad lo hemos dividido en 16 partes que evidentemente será el denominador de la fracción que tenemos que considerar.

Como lo que queremos representar en forma de fracción es las partes rayadas del cuadrado en cuestión, es evidente que tenemos que considerar de esta unidad o cuadrado 3 partes que representan las negras y que actuarán como numerador de la fracción, ya que son las que tomamos de la unidad o cuadrado.

La fracción representativa de esta situación es pues:

$$\frac{3}{16}$$

Ej.: Si nos comentan la fracción 7/8, podemos pensar que la unidad cualquiera que sea la hemos dividido en 8 partes y que de esta unidad hemos considerado 7 partes.

Los números fraccionarios se leen indicando el numerador y a continuación el denominador, es decir, las partes que hemos considerado de la unidad.

Ej.:

$$\frac{3}{5} = \text{(3 partido por 5 ó tres quintos)}$$

$$\frac{7}{12} = \text{(7 partido por 12 ó siete doceavos)}$$

2.–TIPOS DE FRACCIONES

A.–Número mixto.–Es aquel que se compone de un número entero y otro fraccionario.

Para reducir este tipo de números a netamente fraccionarios (es decir, a la unidad que propiamente representa el entero) lo que

Dos amigos se encuentran en la calle y le dice uno al otro:

—¡Chico, estoy cansadísimo. Trabajo 8 horas diarias pintando paredes y tengo el cuerpo destrozado de darle a la brocha!

El otro amigo, gran bromista y sabiendo algo de cálculo, le dijo:

—Yo te puedo demostrar ahora mismo que tú no trabajas nada absolutamente. ¡Verás!:

El año tiene 365 días. Tú trabajas 8 horas diarias, o sea la tercera parte del día; quiere decirse que trabajas al año la tercera parte de 365 días, que es 122 (por exceso).

Bien, el año tiene 52 domingos, que no trabajas nada, o sea que tenemos 122 – 52 = 70 días.

Los sábados por la tarde tampoco trabajas; quiere decirse que como el año tiene 52 sábados, hacen 26 días completos, así: 70 – 26 = 44 días al año.

Disfrutas de 30 días de permiso. Por lo tanto, 44 – 30 = 14 días al año. Te das cuenta que cada año tiene 13 fiestas fijas. Entonces tú trabajas sólo un día al año.

Pero ese día que tú trabajas al año es precisamente el día 1 de Mayo (fiesta del trabajo).

¡No me digas entonces que estás cansado, porque no me lo puedo creer!

Viene del latín "milia passum", miles de pasos. Es decir, la milla equivalía en la antigua Roma a mil pasos, y es equivalente a **1.481 m.** La milla en atletismo equivale a 1.609,40 metros. Esta misma medida, 1.609,3472 m, es la que toman y usan los ingleses.

La milla marina internacional es la distancia que existe entre dos puntos de la superficie terrestre que están situados a igual longitud y cuya latitud difiere en un minuto de arco.

La milla marina internacional tiene una medida de **1.852 m.** Aunque existen otras medidas de millas distintas en otros países, sólo queremos hacer hincapié en esta medida, ya que además de ser la internacional es la que se tiene adoptada en España y en la que se basan todos los problemas náuticos en las Escueles náuticas y militares.

hay que hacer es multiplicar el entero por el denominador y sumarle el numerador, poniendo por denominador el mismo que tenía la fracción, con lo que resultará un número eminentemente fraccionario.

$$2\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 5+3}{5}=\frac{13}{5}$$

NOTA.—Este tipo de números no aparecen en Matemáticas propiamente dichas, excepto en magnitudes que hablen de pesos, toneles, relojes, etc., con lo que su identificación salta a la vista.

Ej.:

$$3 \text{ kilos y medio} = 3\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2+1}{3}=\frac{7}{3}\text{ kilos}$$

$$2 \text{ litros y tres cuartos} = 2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}\text{ litros}$$

$$5 \text{ horas y media} = 5\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 2+1}{2}=\frac{11}{2}\text{ horas}$$

B.—Fracción propia.—Son aquellas que tienen el numerador menor que el denominador (son siempre menores que la unidad).

Ej.:

$$\frac{3}{5}$$

C.—Fracción impropia.—Son aquellas que tienen el numerador mayor o igual que el denominador (son siempre iguales o mayores que la unidad).

Ej.:

$$\frac{5}{5} \text{ ó } \frac{7}{4}$$

NOTA.—Este tipo de fracciones se pueden transformar siempre en números mixtos.

Ej.:

$$\frac{16}{5} \rightarrow \begin{array}{r|l} 16 & 5 \\ \underbrace{1} & 3 \end{array} \rightarrow 3\frac{1}{5} \quad \left(\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}\right)$$

D.—Fracción generatriz.—Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción es posible obtener cuatro tipos de resultados numéricos. A la fracción que reproduce estos números se la llama fracción generatriz.

— Cuando el cociente de la división es exacto. Ej.: $\frac{10}{5}=2$.

— Cuando el cociente de la división se obtiene con decimales exactos. En este caso se dice que la fracción generatriz es decimal exacta.

Ej.: $\frac{357}{10}=35{,}7$.

— Cuando el cociente de la división se obtiene con un grupo de decimales que se empiezan a repetir inmediatamente después de la coma de una forma intermitente o periódica (a este grupo de números que se repiten se les llama período). En este caso se dice que la fracción generatriz es periódica pura.

$$\text{Ej.: } \frac{59}{11} = 5{,}363636 \ldots = 5{,}\widehat{36}$$

— Cuando el cociente de la división se obtiene con un grupo de decimales que se empiezan a repetir, no inmediatamente después de la coma, de una forma intermitente o periódica (a este grupo de números que se repiten también se les llama período). En este caso se dice que la fracción generatriz es periódica mixta.

$$\text{Ej.: } \frac{1129}{330} = 3{,}4212121 \ldots = 3{,}4\widehat{21}.$$

— Cuando el cociente de la división se obtiene con un grupo de decimales que no se repiten de ninguna forma después de la coma.

$$\text{Ej.: } \frac{23}{7} = 3{,}2857142\ldots$$

E.—Fracción generatriz decimal exacta

Son aquellas fracciones que reproducen un número con decimales exactos. Para obtener la fracción generatriz de donde procede un número de estas características se pone en el numerador el número completo sin coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como decimales haya.

Ej.: Obtener la fracción generatriz de 4,21

$$4{,}21 = \frac{421}{100}$$

F.—Fracción generatriz periódica pura

Son aquellas fracciones que reproducen un número con un grupo de decimales (llamado período) que se empiezan a repetir inmediatamente después de la coma.

Para obtener la fracción generatriz de donde procede un número de estas características se pone en el numerador el número completo sin coma ni período menos la parte entera, y en el denominador tantos nueves como cifras tenga el período.

Ej.: Obtener la fracción generatriz de $3{,}\widehat{31}$

$$3{,}\widehat{31} = \frac{331 - 3}{99} = \frac{328}{99}$$

G.—Fracción generatriz periódica mixta

Son aquellas que reproducen un número con un grupo de decimales (llamado período) que no se repiten inmediatamente des-

En matemáticas la cuadratura del círculo es "imposible". Pero, ¿qué significa imposible en matemáticas?

Más imposible era, antiguamente, cruzar el Océano Atlántico.

Hace cien años más difícil era inventar una máquina voladora más pesada que el aire. Más imposible, aún, era volar hasta la luna.

Hoy todo esto se ha superado con creces. Posiblemente una generación venidera dé con la solución del problema.

Queridos alumnos, ya sabéis que esto hoy día no tiene solución; quizá alguno de vosotro, el día de mañana, nos lo resuelva, o, tal vez, los hijos de vuestros hijos.

Un hombre llega a la orilla de un río llevando un lobo, una abra y una col. La barquita para atravesar el río no puede llevar nada más que al pasajero y una de las piezas. Por supuesto, si deja en la orilla al lobo y a la cabra o la cabra y la col, cualquiera de ellos se comerá al otro. ¿Cómo podemos hacer la travesía sin perder ninguna de nuestras pertenencias?

SOLUCION

Toma primero la cabra, atraviesa el río y la deja en la otra orilla.

Vuelve, toma al lobo, lo lleva a la otra orilla donde está la cabra, deja al lobo y coge la cabra y cruza el río nuevamente con ella hacia la orilla donde está la col.

En la otra orilla deja la cabra, carga en el bote la col y la cruza donde está el lobo.

Vuelve él solo a por la cabra, la carga en el bote, la cruza y ya están todos cruzados y salvados.

pués de la coma, es decir, que antes de comenzar el período existen decimales no periódicos.

Para obtener la fracción generatriz de donde procede un número de estas características, se pone en el numerador el número completo sin coma ni período, menos la parte entera seguida de la decimal no periódica sin coma, y en el denominador se ponen tantos nueves como cifras tenga el período seguido de tantos ceros como decimales no periódicos existan.

Ej.: Obtener la fracción generatriz de $7{,}21\widehat{348}$

$$7{,}21\widehat{348}=\frac{721348-721}{99900}=\frac{720627}{99900}=\frac{240209}{33300}$$

3.–PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Si a los dos términos de una fracción numerador y denominador se les multiplica por un mismo número distinto de cero, la fracción no experimenta alteración (se dice que las fracciones son equivalentes).

Ej.:

$$\frac{7}{5}=\frac{7\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{21}{15}$$

– Si a los dos términos de una fracción (numerador y denominador) se les divide por un mismo número (tiene que ser un divisor común a ambos o como tope el m.c.d. de ambos) distinto de cero, la fracción no experimenta alteración (se dice que las fracciones son equivalentes).

Ej.:

$$\frac{45}{10}=\frac{\frac{45}{5}}{\frac{10}{5}}=\frac{9}{2}.$$

– Basándonos en la propiedad anterior, podemos simplificar cualquier fracción dividiendo sus dos términos (numerador y denominador) por un mismo número hasta que éstos sean primos entre sí.

Una fracción no se podrá simplificar más cuando hayamos dividido el numerador y el denominador de la fracción primitiva, por el m.c.d. de ambos. En este caso se dice que la fracción es irreducible.

NOTA.–En todo el cálculo matemático, es necesario simplificar o hacer irreducible cualquier fracción, como norma importante y de estilo.

4.–REDUCCION DE FRACCIONES A MINIMO COMUN DENOMINADOR

Es sabido que entre varias fracciones que tengan el mismo denominador será mayor la que tenga mayor numerador. Si los denominadores de distintas fracciones son distintos no podremos a simple vista decidir qué fracción es mayor o menor; pues bien, cuando ocurra esto lo que tendremos que hacer es conseguir que todas las fracciones adopten un denominador común o igual, y mejor que este denominador sea el más pequeño posible. Así, cuando tengamos varias fracciones y queramos hacer que todas tengan el mismo denominador y el más pequeño, hallaremos el m.c.m. de todos los denominadores y éste será el denominador común nuevo a todas las fracciones. A continuación, con objeto de no alterar el valor de cada fracción inicial, dividiremos el m.c.m. hallado, entre cada denominador antiguo, y el resultado es por lo que hay que multiplicar cada respectivo numerador.

Ej.: Ordenar de mayor a menor las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{6}$$

No podemos saber cuál es mayor o es menor, mientras no tengan el mismo denominador, esto es, tenemos que reducirles a común denominador.

Primeramente hallaremos el m.c.m. (2, 4, 6) = 12, y éste va a ser el denominador común, que dividiremos entre 2, 4 y 6, multiplicando los resultados por cada numerador respectivo.

$$\frac{3}{2} = \frac{18}{12}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

A igualdad de denominadores la que tenga mayor numerador es mayor. Así que la ordenación pedida es como sigue:

$$\frac{21}{12}, \frac{18}{12}, \frac{10}{12}, \text{ es decir: } \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$$

5.–OPERACIONES CON FRACCIONES

A.–Suma y diferencia.–Existen dos procedimientos:

– Reducción a común denominador. El resultado de la suma o diferencia de varias fracciones es otra fracción cuyo denominador es el producto de todos los denominadores y el numerador es el resultado de multiplicar cada numerador por todos los denominadores menos por el suyo respectivo.

¿Qué es el tiempo? Creemos que fue San Agustín en sus famosas "Confesiones" el que dio la mejor definición: "Si nadie me lo pregunta, lo sé. Si tengo que explicárselo a quien me lo pregunta, no lo sé". Por supuesto que lo sabemos y lo entendemos cuando alguien nos habla de él.

Poco más o menos podemos decir lo mismo del espacio. Podemos medir distancias en él, hacer cartografía espacial con posibilidad de un alto índice de exactitud. ¿Pero y ver el espacio a través de cientos, miles o millones de años luz?

Tenemos que considerar que el espacio es nuestro medio natural y, haciendo una definición un poco gratuita, bien podemos decir que no vemos más allá de nuestros ojos, ya que el espacio es considerado como el inmenso vacío que existe entre los astros, aunque tal vacío está poblado por gran número de asteroides del orden de cientos de millones contando como tales sólo los que tienen más de 30 cm de diámetro.

Se considera a los "estáteres" las monedas más antiguas que fueron acuñadas en Lydia, Asia Menor, en tiempos del rey Gydes. Se componían de una aleación de oro y plata y tienen una antigüedad de unos 2.700 años.

En China también existían monedas por aquella época, y han sido descubiertas monedas de plata pertenecientes a la dinastía Chon.

La primera moneda que lleva incluída la fecha de acuñación grabada en cada ejemplar, como hoy día se hace, es la danesa del Obispo de Roskilde que data de 1234 y de la cual sólo se conservan 6 ejemplares.

La moneda de oro de 200 "Mohurs", acuñada en la India en 1654, es la moneda de más alto valor nominal y de mayor valor intrínseco de las acuñadas en el mundo. Pesaba 2 Kg y 177 gr, con un diámetro de 13,6 cm y con un valor de 2.800 libras esterlinas. El único ejemplar que se conservaba en la India desapareció en 1820. En el Museo Británico existe una reproducción en yeso de esta moneda.

Ej.: Operar: $\frac{2}{3}-\frac{5}{7}+\frac{4}{6}$.

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{7}+\frac{4}{6}=\frac{2\cdot 7\cdot 6-5\cdot 3\cdot 6+4\cdot 7\cdot 3}{3\cdot 7\cdot 6}=\frac{84-90+84}{126}=$$

$$=\frac{78}{126}=\frac{39}{63}=\frac{13}{21}$$

– Reducción a mínimo común denominador. El resultado es otra fracción cuyo denominador es el m.c.m. de todos los denominadores y el numerador se obtiene dividiendo el m.c.m. entre cada denominador antiguo y multiplicando el resultado por su respectivo numerador.

Ej.: Operar: $\frac{2}{3}-\frac{5}{7}+\frac{4}{6}$.

$$\text{m.c.m.}\,(3, 7, 6) = 42$$

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{7}+\frac{4}{6}=\frac{14\cdot 2-6\cdot 5+7\cdot 4}{42}=\frac{28-30+28}{42}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$$

NOTA.–Este procedimiento es el que generalmente se utiliza en Matemáticas y del que haremos uso en todos los cálculos algebraicos posteriores.

B.–Producto.–El resultado de la multiplicación de varias fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el producto de los denominadores. (Como se dice vulgarmente, se multiplican en línea.)

Ej.: $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

C.–Cociente.–El resultado de dividir dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, y por denominador tiene el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda. (Como se dice vulgarmente, se multiplica en cruz.)

Ej.: $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

NOTA.–Ahora bien, la forma de dividir fracciones planteada en el ejemplo anterior no es la que comúnmente surge en el cálculo operativo, es decir, es la misma sólo que con otra fisonomía.

Ej.: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

Ej.:
$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 5} = \frac{12}{5}$$

Ej.:
$$\frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}$$

Ej.: Operar:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+5\right)\left(\frac{4}{3}-6\right)}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}} = \frac{\frac{2+15}{3} \cdot \frac{4-18}{3}}{\frac{8+6-15}{12}} = \frac{\frac{17}{3} \cdot \frac{-14}{3}}{\frac{-1}{12}} = \frac{\frac{-238}{9}}{\frac{-1}{12}} =$$

$$= \frac{-2856}{-9} = \frac{952}{3}$$

Ej.: Operar las partes azules de las siguientes figuras:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8} = \frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Obsérvese que cada gráfico está dividido en ocho partes y en el primer gráfico tomamos 3 coloreadas y en el segundo 5 coloreadas.

Ej.: Averiguar cuáles son todas las fracciones equivalentes a $\frac{16}{20}$ cuyo denominador sea menor que 50.

Pues son todas aquellas en las que pueda multiplicar o dividir el numerador y denominador de la fracción dada, sin que el denominador de cualquiera de ellas llegue a sobrepasar a 50.

$$\frac{16}{20}, \frac{8}{10}, \frac{4}{5}, \frac{32}{40} \text{ son equivalentes}$$

Me complace enormemente cuando estoy de vacaciones pasear por el puerto en la ciudad donde me encuentre y por el mercado. Estudiar a la gente conversar con ella.

Cierto día, en un mercado de un pueblecito costero, me encontré con un problema a estudiar. En un puesto de sandías observé dos de ellas: una tenía alrededor de 80 cm de perímetro, y otra unos 40 cm de perímetro. Pedían por ésta cien pesetas (100) y por la primera trescientas pesetas (300). Me surgió inmediatamente la pregunta. ¿Tú cuál comprarías?

LA SOLUCION EN (pág. 240).

Durante cuatro siglos los incas organizaron pacientemente un sistema económico y social en una forma de estado totalitario donde nada se dejaba al azar, ya fuera la vida diaria, las faenas, las fiestas, las tareas más indispensables, e incluso la muerte.

Los mensajeros y funcionarios incas viajaban constantemente transmitiendo las órdenes supremas. Normalmente, el indígena tenía que morir en el lugar en que había nacido.

La comunidad se hacía cargo de los enfermos, inválidos y ancianos. Los hombres fuertes trabajaban las tierras comunales y las parcelas de los particulares enfermos.

Inmensos rebaños de llamas eran vigilados por pastores que eran servidores civiles. Los abastecimientos de comestibles se almacenaban fuera de las aldeas y a lo largo de los caminos. Los funcionarios tomeban lo justo y necesario para el Inca y su corte.

Ej.: En una empresa un empleado tiene que hacer $7\frac{2}{3}$ de un trabajo. Si comienza su trabajo a las $5\frac{1}{4}$ horas de la mañana y viene realizando $\frac{5}{9}$ de trabajo a la hora. Averiguar si terminará su trabajo en una jornada laboral de 8 horas, sabiendo que ha descansado $1\frac{1}{4}$ horas. (El descanso se incluye en la jornada laboral.)

Inicialmente vamos a poner todos los números mixtos en forma neta de fracción:

– Cantidad de trabajo: $7\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{23}{3}$ trabajó.

– Comienzo del trabajo: $5\frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{21}{4}$ horas.

– Trabajo realizado a la hora $\frac{5}{9}$ trabajó.

– Duración de la jornada: 8 horas.

– Descanso en la jornada: $1\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{5}{4}$ horas.

Vamos a averiguar las horas que realmente ha trabajado en la jornada: Estas serán las 8 de la jornada menos el descanso:

$$8 - \frac{5}{4} = \frac{32 - 5}{4} = \frac{27}{4} \text{ horas trabajadas}$$

Ahora averiguamos la cantidad de trabajo que ha realizado en las $\frac{27}{4}$ horas trabajadas, sabiendo que en cada hora hace $\frac{5}{9}$ del trabajo:

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{27}{4} = \frac{135}{36} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} \text{ trabajó}$$

Pues bien, ya tenemos:

$$\text{Trabajo a realizar: } \frac{23}{3}$$

$$\text{Trabajo realizado: } \frac{15}{4}$$

Simplemente lo que tenemos que hacer es comparar estas dos fracciones, para ello las reduciremos a mínimo común denominador (m.c.m. de 3 y 4 = 12)

$$\frac{23}{3} = \frac{92}{12}$$

$$\frac{15}{4} = \frac{45}{12}$$

Se observa perfectamente que es mayor el trabajo a realizar por tener esta fracción mayor el numerador a igualdad de denominadores, luego el empleado no terminará el trabajo.

Ej.: Operar la siguiente expresión: $\dfrac{5}{3+\dfrac{2}{5+\dfrac{3}{4}}}$

$$\frac{5}{3+\frac{2}{5+\frac{3}{4}}}=\frac{5}{3+\frac{2}{\frac{20+3}{4}}}=\frac{5}{3+\frac{2}{\frac{23}{4}}}=\frac{5}{3+\frac{8}{23}}=$$

$$=\frac{5}{\frac{69+8}{23}}=\frac{115}{77}$$

Ej.: Operar la expresión:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{\frac{4}{\frac{5}{2}}}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{\frac{4}{\frac{5}{2}}}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{20}}=\frac{40}{30}=\frac{4}{3}$$

En el centro de la magnífica Plaza Mayor de Madrid se encuentra situada la estatua de Felipe III, obra de Juan de Bolonia y Pietro Tacca, inaugurada en el año 1616 y colocada primeramente en la Casa de Campo, finca real, cerrada al público en aquella época.

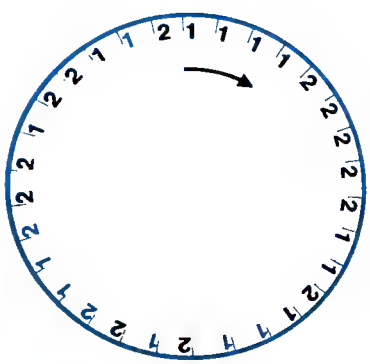
En su reinado, y para hacer frente al constante aumento de las necesidades de la hacienda pública, mandó realizar manipulaciones con la moneda (Resello). Se hicieron también acuñaciones de monedas de cobre puro, bañadas en oro, que inundaron Castilla e hicieron desaparecer en gran parte la moneda de buena ley. En su reinado fue corriente la venta de cargos públicos y jurisdicciones.

Esta necesidad de dinero fue motivada en parte por los gastos de traslado de la corte a Valladolid en 1601 y su posterior retorno a Madrid en 1606.

La Plaza Mayor fue construida en el año 1619, siendo desde entonces testigo de acontecimientos muy importantes de nuestra historia.

Quizá uno de los problemas más antiguos que existe sea el atribuido a Josefo. Tenemos treinta herederos (quince del primer matrimonio y otros quince del segundo). Se pueden poner convenientemente los del primer matrimonio y los del segundo matrimonio, contar hasta nueve y eliminarlo (el que haga el noveno), o sacarlo del círculo, y así sucesivamente.

De esta forma podemos eliminar al grupo que queramos. Si acaso nos dicen (una vez organizado el grupo) que quieren eliminar al otro, o sea al que se salvaba, no tenemos que hacer modificación alguna, sino en vez de contar de derecha a izquierda, contar al revés.



Ej.: Operar la expresión: $\dfrac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-2\right)}$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-2\right)}=\frac{\frac{12+2-9}{18}\cdot\frac{24-5}{30}}{\frac{6+4}{12}\cdot\frac{1-12}{6}}=\frac{\frac{5}{18}\cdot\frac{19}{30}}{\frac{10}{12}\cdot\frac{-11}{6}}=$$

$$=\frac{\frac{95}{540}}{\frac{-110}{72}}=\frac{95\cdot 72}{540\,(-110)}=\frac{6840}{-59400}=-\frac{684}{5940}=$$

$$=-\frac{114}{990}=-\frac{57}{495}$$

Ej.: A un tonel de vino se le extraen sus $\frac{3}{5}$ partes. Cuántas partes de vino quedan en el tonel.

Evidentemente, el tonel lleno tiene $\frac{5}{5}$ partes, es decir, la unidad, luego lo que queda después de extraer sus $\frac{3}{5}$ partes es:

$$\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{5-3}{5}=\frac{2}{5}\text{ partes}$$

6.—CONSTRUCCION DE LOS CONJUNTOS DE NUMEROS

Esta pregunta surge con ánimo de relacionar los números enteros y concretamente las fracciones con la teoría de conjuntos.

A.—Construcción del conjunto de los números enteros

Los números enteros son el resultado de establecer una relación de equivalencia en el conjunto N × N.

Piénsese que el conjunto N × N está formado por pares, ya que es un conjunto producto cartesiano.

Pues bien, de estos pares de N × N se pueden obtener las siguientes conclusiones, considerando el par (a, b) como genérico:

$$(a, b)\begin{cases} a > b \rightarrow \text{número entero positivo} \begin{cases} (1,0)\ (2,1)\ (3,2)\ \ldots \\ (2,0)\ (3,1)\ (4,2)\ \ldots \\ (3,0)\ (4,1)\ (5,2)\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \\ a < b \rightarrow \text{número entero negativo} \begin{cases} (0,1)\ (1,2)\ (2,3)\ \ldots \\ (0,2)\ (1,3)\ (2,4)\ \ldots \\ (0,3)\ (1,4)\ (2,5)\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \\ a = b \rightarrow \text{número nulo o cero} \begin{cases} (0,0)\ (1,1)\ (2,2)\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \end{cases} \text{Clases de equivalencia}$$

Es decir, dos elementos pertenecen a una misma clase de equivalencia cuando: $(a, b)\ R\ (c, d) \Rightarrow a + d = b + c$.

Si de cada una de estas clases de equivalencia elegimos como representante de clase al par que tenga alguna componente nula, estamos definiendo lo que se llama el **representante canónico** de la clase de equivalencia, de lo que deducimos que cualquier número entero puede representarse de la siguiente forma:

(a, o) → número entero positivo
(o, b) → número entero negativo
(o, o) → número nulo o cero

Ej.: $(7,3) = 4$; representante conónico $= (4,0)$
$(5,6) = -1$; representante conónico $= (0,1)$
$(7,7) = 0$; representante conónico $= (0,0)$

Un nuevo idioma ha sido incorporado a los muchos que ya se conocen en el mundo: es el idioma de las gallinas. En efecto, después de varios años de investigaciones, dos sabios norteamericanos han llegado a la conclusión de que las gallinas hablan entre sí. Ahora piensan confeccionar un diccionario y quizá una gramática del idioma de las gallinas.

Desde hace 4 años los sabios han estado registrando los cacareos y cloqueos de miles de gallinas en unos aparatos electrónicos llamados "fono-espectógrafos". Estos aparatos convierten los sonidos en una línea ondulada sobre una cinta de papel. Estas líneas revelan cuándo las gallinas cloquean por alegría, por histeria, por tener frío o hambre, o por estar solas.

Desde luego el vocabulario que ha podido ser estudiado es muy limitado. He aquí unas muestras:

El equivalente a nuestra frase "La cena está servida", es un cloqueo rápido con el que la gallina avisa al polluelo. Para indicar que debe acostarse, emite una especie de ronroneo que dura aproximadamente un segundo y medio. Las señales de peligro son diferentes, según proceda del cielo o de un animal terrestre. Por ejemplo, para advertir la presencia de un gavilán lanza gritos roncos y fuertes; en cambio para advertir la presencia del hombre lanza cacareos fuertes y repetidos. Estas señales registradas en el espectógrafo pueden ser reproducidas por un altavoz. Los dos hombres, el doctor Nicolás Collias y Martin Joos, lo hicieron varias veces y el resultado fue asombroso. En todos los casos los polluelos interpretaron correctamente la orden o advertencia y reaccionaron de la forma prevista. La cosa resulta entre divertida y sorprendente.

Este va de investigación policial.

Un matemático llama a su casa y le dice a la criada que tome el libro que tiene en la mesita de noche, ya que dentro se ha dejado un billete de 100 dólares. Y le dice que envíe con el chófer el billete dentro del libro a su oficina. Esta lo hace y al llegar a la oficina lo entrega al conserje para que se lo dé a su propietario. Este cuando lo recibe lo desenvuelve y ve que el billete había desaparecido.

Comienza la investigación:

El conserje dice que su chófer le ha dado un paquete para él, y sin desenvolverlo se lo ha entregado.

El chófer dice que la criada le ha dado un paquete para el señor y sin desenvolverlo se lo ha dado al conserje.

La criada dice que ella metió el billete entre las páginas 99 y 100 del libro y lo entregó al chófer. ¿Quién es el ladrón?

SOLUCION

Mirar las páginas 99 y 100 de un libro y veréis que ambas pertenecen a la misma hoja. El ladrón no es tal: **es ladrona.**

II.—Construcción del conjunto de los números racionales

Los números racionales son el resultado de establecer una relación de equivalencia en el conjunto $Z \times Z^*$ (entiéndase Z^* como el conjunto de los números enteros excluido el cero. $Z^* = Z - \{0\}$.

Evidentemente, el conjunto $Z \times Z^*$ está formado por pares, ya que es conjunto producto cartesiano.

Pues bien, al no estar incluido en el conjunto Z^* el cero, estos pares no podrán tener nunca como segundo componente al elemento cero.

Obsérvese que para los números racionales se acostumbra a utilizar la notación $\frac{a}{b}$ que es equivalente en este caso a la notación (a, b)

$$\frac{a}{b} \equiv (a, b)$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{Clases de equivalencia}$$

Es decir, dos elementos pertenecen a una misma clase de equivalencia:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Al representante de clase más sencilla de cada clase de equivalencia también se la llama representante canónico, siendo cualquier número racional de la forma:

$$(a, b) \begin{cases} a \in Z \\ b \in Z^* \end{cases}$$

TEMA 13

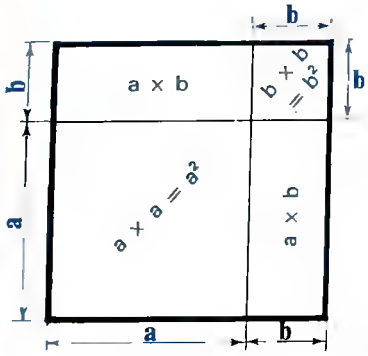
POTENCIACION

INDICE

1.–CONCEPTO DE POTENCIA.
2.–PARTICULARIDADES EN LA POTENCIACION.
3.–OPERACIONES CON POTENCIAS.
A.–Producto de potencias de la misma base.
B.–Cociente de potencias de la misma base.
C.–Potencia de potencia.
D.–Potencia de un producto.
E.–Potencia de un cociente.

TEMA 13

Los griegos fueron los primeros en la historia que resolvieron problemas como el de $(a + b)^2$, de la manera siguiente: tenemos un cuadrado que tiene de lado **a** metros; debemos añadirle un trozo que tiene **b** metros. Como sabemos que el área de un cuadrado que tiene **a** metros es a^2, tenemos:



$(a + b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2$

POTENCIACION

1.–CONCEPTO DE POTENCIA

Cuando un mismo número lo queremos multiplicar por sí mismo, una cierta cantidad de veces, la operación se puede reducir o condensar a una expresión que da origen al concepto de potencia.

Su representación general es como sigue:

$$a^{\substack{b \rightarrow \text{exponente} \\ \rightarrow \text{base}}} \Big\} \text{ POTENCIA}$$

y se lee: "a elevado a b".

El número que se va a multiplicar por sí mismo una cierta cantidad de veces recibe el nombre de base (a), y la cantidad de veces que lo multiplicamos por sí mismo recibe el nombre de exponente (b).

Ej.: Imaginemos que queremos multiplicar el número 2 cinco veces por sí mismo.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

2.–PARTICULARIDADES EN LA POTENCIACION

Cualquier número negativo elevado a exponente par, siempre da como resultado un número positivo.

$$(-a)^{\text{n.º par}} = a^{\text{n.º par}}$$

Ej.: $(-2)^4 = 2^4 = 16$

Efectivamente, $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 2^4$, ya que si está elevada la base negativa a un número par, aparecerán un

número par de signos negativos, y multiplicar un número par de veces un signo negativo, siempre da como resultado un signo positivo.

b) Cualquier número negativo elevado a exponente impar siempre da como resultado un número negativo.

$$(-a)^{\text{n.º impar}} = -a^{\text{n.º impar}}$$

Ej.: $(-2)^3 = -2^3 = -8$

Efectivamente, $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -2^3$, ya que si está elevada la base negativa a un número impar, aparecerá un número impar de signos negativos, y multiplicar un número impar de veces un signo negativo siempre da como resultado un signo negativo.

c) Es obvio que cualquier número positivo elevado a exponente par o impar siempre da como resultado un número positivo.

Cualquier potencia de la unidad siempre es la unidad (excepto cuando el exponente sea ∞).

$$1^m = 1$$

Ej.: $1^3 = 1$

d) Cualquier número elevado a cero siempre es igual a la unidad.

Ej.: $3^0 = 1$; $(\frac{1}{4})^0 = 1$; $(-4)^0 = 1$

e) Cualquier potencia de base cero siempre es cero (excepto cuando el exponente sea cero):

Ej : $0^3 = 0$

f) Cualquier número elevado a exponente negativo siempre equivale a la unidad dividida por la potencia con el exponente positivo:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Es decir, que las potencias (siempre que estén en forma de producto) se pueden trasladar del numerador al denominador de una fracción o viceversa con el signo del exponente cambiado.

Ej.: Hallar el valor de 3^{-2}:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Ej.: Colocar todas las potencias de la siguiente expresión en el numerador:

$$\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^{-5} \cdot 2^6} = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{-6}$$

Giotto di Bondone (1266-1336), gran innovador de la pintura, fue el inventor de la perspectiva y supo dar a sus figuras aspecto de seres vivos, agrupándolas con naturalidad.

Como era un superdotado y su estilo entraba por los ojos su carrera fue rápida. Hasta entonces, y siguiendo el estilo bizantino, los pintores hacían figuras planas sin vida y sin movimiento, carecían del sentido de la proporción y de la perspectiva, el tamaño de las personas y de los accidentes geográficos no estaban relacionados el uno con el otro.

Se cuenta que un emisario del Papa Bonifacio VIII fue enviado a Siena a recoger muestras de los mejores pintores de la época. Al llegar a Giotto, éste tomó una hoja de pergamino y apoyando el codo en la cadera para dar más fuerza al pulso, girando sólo la muñeca, dibujó una circunferencia perfecta, alargó el pergamino y le dijo: Mándela junto a las otras, verá cómo el Papa reconoce que es mía.

En 1334 fue nombrado arquitecto de la catedral y de todos los edificios públicos de Florencia. Inició dos años después la construcción del campanario de aquélla, muriendo, sin haber podido verla terminada, en el año 1336.

Un comentarista de la época dice que el gran pintor y arquitecto murió de pena, por la tristeza que sintió al comprender que había cometido varios errores al calcular el campanario del templo de Sta. Reparada, también en Florencia.

A un aficionado de las Matemáticas le preguntaron su edad. Su contestación fue un tanto complicada. Multiplicando por 3 los años que tendré dentro de otros 3 años y restándole los años que tenía hace 3 resultará los años que tengo. ¿Qué edad tenía?

LA SOLUCION EN (pág. 240).

g) La potenciación no posee la propiedad conmutativa:

$$a^b \neq b^a$$

Ej.: $3^2 \neq 2^3$

h) La potenciación no posee la propiedad distributiva:

$$(a + b)^m \neq a^m + b^m$$

Ej.: $(2 + 3)^4 \neq 2^4 + 3^4$

i) Como veremos posteriormente, en las operaciones de potenciación es conveniente, si se puede, descomponer las bases de las potencias en factores primos, con el objeto de llegar a simplificar más el resultado de cualquier operación.

Ej.: $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$ (véanse operaciones siguientes)

3.–OPERACIONES CON POTENCIAS

La primera operación que surge es el producto, ya que la suma o diferencia de potencias, aun siendo de la misma base, no admite transformación dentro de la propia operativa de la potenciación, y tendremos que operarlas con los criterios generales del cálculo.

NOTA.–Todas las operaciones que se exponen a continuación son reversibles, es decir, se pueden realizar también en sentido inverso.

Ej.: $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$

$3^3 - 2^2 = 27 - 4 = 23$

También ocurre que cuando las potencias sean de distinta base y queramos efectuar su producto, cociente, etc., tampoco existirá transformación dentro de la operativa de la potenciación y tendremos que operarlos con arreglo a los criterios generales del cálculo.

Ej.: $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

A.–Producto de potencias de la misma base.

El resultado es otra potencia que tiene por base la misma, y por exponente la suma de los exponentes:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ej.: $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

Ej.: $2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2$

Ej.: $2^{-7} \cdot 2^4 = 2^{-7+4} = 2^{-3}$

B.—Cociente de potencias de la misma base.

El resultado es otra potencia que tiene por base a la misma, y por exponente la diferencia de exponentes (el exponente del numerador menos el exponente del denominador, y no al revés).

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ej.: $\frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

Ej.: $\frac{2^{-3}}{2^4} = 2^{-3-4} = 2^{-7}$

Ej.: $\frac{2^5}{2^{-3}} = 2^{5-(-3)} = 2^{5+3} = 2^8$

Ej.: $\frac{2^{-6}}{2^{-4}} = 2^{-6-(-4)} = 2^{-6+4} = 2^{-2}$

C.—Potencia de potencia.

El resultado es otra potencia que tiene de base a la misma, y por exponente el producto de exponentes:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ej.: $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

Ej.: $(2^{-5})^2 = 2^{(-5) \cdot 2} = 2^{-10}$

Ej.: $(3^{-1})^{-4} = 3^{(-1)(-4)} = 3^4$

D.—Potencia de un producto.

El resultado es elevar cada factor del producto a la potencia dada:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Ej.: $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$

Ej.: $(2^3 \cdot 5^4)^2 = (2^3)^2 \cdot (5^4)^2 = 2^{3 \cdot 2} \cdot 5^{4 \cdot 2} = 2^6 \cdot 5^8$

E.—Potencia de un cociente.

El resultado es elevar el numerador y el denominador del cociente a la potencia dada:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

Solución al problema de cubo y el cuadrado de la página 194.

Veamos primeramente el metro cuadrado.

En un metro cuadrado hay un millón de milímetros cuadrados. Como cada mil milímetros cuadrados son un metro de longitud (el ancho no nos importa, aunque tiene un milímetro), entonces la longitud sería mil metros, o sea un kilómetro.

Ahora, y basándonos en el anterior que teníamos una línea de un kilómetro, el metro cúbico contiene 1.000 × 1.000 × 1.000 milímetros cúbicos.

O sea, que el metro cúbico al desarrollarlo en cuadraditos de un milímetro, tiene el mismo anterior de 1 km multiplicado por mil, o sea, tenemos una línea de mil **kilómetros** de longitud, y no seis como tú pensabas. Claro, decías: si un lado tiene 1 km, los 6 lados tendrán 6 km.

Solución al problema de las siete cadenas de la página 199.

Si has pensado abrir un eslabón de cada una de las siete cadenas, está mal. Si has pensado abrir seis, ya que el último no hay necesidad de abrirlo para que se una con el anterior, tampoco acertaste (para unir un eslabón con otro no hace falta más que abrir uno de ellos). La solución perfecta es: tomamos los cinco eslabones de una cadena y los abrimos (los cinco). Después cada uno de estos cinco, abiertos, nos sirve para unir cada uno de los otros seis restantes trozos de cadena, ya que para unirlos sólo se necesitan hacer cinco uniones. Observad el dibujo de la página 199.

La lucha contra los desiertos se ha convertido en un problema mundial por el que se interesan gran número de países.

La población mundial aumenta sin cesar y gran parte de ella sufre las consecuencias de una alimentación muy deficiente.

A pesar de todas las tentativas que se hacen para impedir su extensión, los desiertos han seguido durante siglos cubriendo hectárea por hectárea de tierras de labor.

Este fenómeno se manifiesta tanto en Asia como en América. A este respecto se considera que ya los romanos marcaron una pauta funesta al agotar el suelo de los valles en los países dominados produciendo cosecha tras cosecha del grano necesario para su metrópoli, sin dejar a la tierra recuperarse.

Esta actitud fue seguida en general por todos los pueblos conquistadores, que en su afán de conseguir la máxima riqueza de productos vegetales, con el menor gasto, han esquilmado zonas que fueron productivas dejándolas abandonadas y permitiendo que la erosión las convierta en predesiertos, y luego en desiertos efectivos.

Ej.: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

Ej.: $\left(\frac{3^2}{5^3}\right)^4 = \frac{(3^2)^4}{(5^3)^4} = \frac{3^{2\cdot 4}}{5^{3\cdot 4}} = \frac{3^8}{5^{12}}$

Ej.: Ordenar en sentido creciente los siguientes números:

$$2^3 \; ; \; 3^0 \; ; \; 2^{-2} \; ; \; (-5)^3 \; ; \; (-7)^{-2} \; ; \; (-2^4)^3 \; ; \; (-4)^2$$

Es decir, tenemos que localizar el valor de cada uno de ellos para poder ordenarlos. Llegaremos a la solución operando cada uno de ellos.

$$2^3 = 8 \qquad ⑥$$

$$3^0 = 1 \qquad ⑤$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \qquad ④$$

$$(-5)^3 = -5^3 = -125 \qquad ②$$

$$(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} \qquad ③$$

$$(-2^4)^3 = -(2^4)^3 = -2^{12} = -\,4.096 \qquad ①$$

$$(-4)^2 = 4^2 = 16 \qquad ⑦$$

Como de lo que se trata es de ordenarlos en sentido creciente (de menor a mayor), resulta:

$$(-2^4)^3 \; ; \; (-5)^3 \; ; \; (-7)^{-2} \; ; \; 2^{-2} \; ; \; 3^0 \; ; \; 2^3 \; ; \; (-4)^2$$

Ej.: Operar la expresión: $\left(\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^{-5} \cdot 2^6}\right)^2$

$$\left(\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^{-5} \cdot 2^6}\right)^2 = \frac{(2^3)^2 \cdot (2^4)^2}{(2^{-5})^2 \cdot (2^6)^2} = \frac{2^6 \cdot 2^8}{2^{-10} \cdot 2^{12}} = 2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^{10} \cdot 2^{-12} = 2^{12}$$

Ej.: Operar la expresión: $\left(\frac{3^4 \cdot 9^{-2}}{27^{-3} \cdot 3^3}\right)^{-1}$

$$\left(\frac{3^4 \cdot 9^{-2}}{27^{-3} \cdot 3^3}\right)^{-1} = \frac{(3^4)^{-1}\,(9^{-2})^{-1}}{(27^{-3})^{-1} \cdot (3^3)^{-1}} = \frac{3^{-4} \cdot 9^2}{27^3 \cdot 3^{-3}} = \frac{3^{-4} \cdot (3^2)^2}{(3^3)^3 \cdot 3^{-3}} =$$

$$= \frac{3^{-4} \cdot 3^4}{3^9 \cdot 3^{-3}} = 3^{-4} \cdot 3^4 \cdot 3^{-9} \cdot 3^3 = 3^{-6}$$

Ej.: Operar la expresión: $\dfrac{2^{1/2} \cdot 2^{3/4}}{2^{-5/3} \cdot 2^{4/5}}$

$$\frac{2^{1/2} \cdot 2^{3/4}}{2^{-5/3} \cdot 2^{4/5}} = 2^{1/2} \cdot 2^{3/4} \cdot 2^{5/3} \cdot 2^{-4/5} = 2^{1/2 + 3/4 + 5/3 + 4/5} =$$

$$= 2^{\frac{30 + 45 + 100 - 48}{60}} = 2^{\frac{127}{60}}$$

Ej.: Hallar el valor de $16^{0,25}$

$$16^{0,25} = (2^4)^{0,25} = 2^{4 \cdot 0,25} = 2^1 = 2$$

Ej.: Cuál es la menor potencia a que se ha de elevar 1/2 para que el resultado sea menor que 1/1000.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1^1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1^9}{2^9} = \frac{1}{512}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

La potencia debe ser, pues, el número 9, ya que si es superior rebasará al tope 1/1000.

Ej.: Calcular el valor de: $\left(\dfrac{64}{343}\right)^{-4/3}$

$$\left(\frac{64}{343}\right)^{-4/3} = \frac{64^{-4/3}}{343^{-4/3}} = \frac{(2^6)^{-4/3}}{(7^3)^{-4/3}} = \frac{2^{-8}}{7^{-4}} = \frac{7^4}{2^8} = \left(\frac{7}{2^2}\right)^4 = \left(\frac{7}{4}\right)^4 =$$

$$= (1,75)^4 = 9,3789062$$

Ej.: Operar la expresión: $\left(\dfrac{a^2 \cdot a^{-3}}{a^5 \cdot a^4}\right)^{-2}$

$$\left(\frac{a^2 \cdot a^{-3}}{a^5 \cdot a^4}\right)^{-2} = \frac{(a^2)^{-2} \cdot (a^{-3})^{-2}}{(a^5)^{-2} \cdot (a^4)^{-2}} = \frac{a^{-4} \cdot a^6}{a^{-10} \cdot a^{-8}} = a^{-4} \cdot a^6 \cdot a^{10} \cdot a^8 = a^{20}$$

El desierto de Atacama, situado al norte de Chile, está considerado como el lugar más seco del mundo. En la ciudad de Iquique sólo han caído 1,5 mm de agua por metro cuadrado en 27 años, y en el centro del desierto no se ha podido medir ninguna precipitación, conservando por consiguiente el promedio anual más bajo, lo que le hace ser el lugar más seco del mundo.

Hasta el año 1971 en que dio fin la sequía seguida más larga conocida, no llovía en Atacama desde 400 años antes. No obstante este lugar es utilizado y explotado por las grandes riquezas que en él se encuentran: de allí se saca el famoso Nitrato de Chile, abono natural muy usado en la agricultura. De este nitrato se extrae yodo en gran cantidad. En otros lugares, también en el desierto, existen minas muy ricas de cobre y de otros minerales.

El hombre ha conseguido adaptarse a este clima y lo que ha realizado en esta zona raya con lo imposible. Hay que considerar que allí por la sequedad del clima no pueden vivir ni resistir las moscas ni sus larvas.

La región de Atacama se cuece bajo el sol implacable; es el reino de las rocas, la sal y el yodo.

Fue en esta región en donde, de forma casual, se hizo el descubrimiento de los grandes depósitos de nitrato que hicieron la fortuna de Chile en una época ya pasada.

Según cuenta la historia, un grupo de indígenas que cruzaba este desierto se detuvo una noche para descansar; reunieron algunas piedras grises para hacer fuego. De pronto vieron cómo lenguas de fuego brotaron en la noche. Convencidos de que era obra del demonio, los indios abandonaron todo y huyeron despavoridos. Días más tarde contaron esto a un misionero español. Este visitó el lugar y recogió las cenizas del campamento; después de estudiarlas, sin encontrar nada anormal, las arrojó en su jardín. Al poco tiempo vio resultados sorprendentes: el maíz creció el doble de su altura, las plantas y hortalizas se desarrollaron espectacularmente. Por primera vez se había empleado el nitrato como fertilizante.

Ej.: Operar la expresión: $\left(\frac{8^2 \cdot 9^3}{4}\right)^2 \cdot 3$

$$\left(\frac{8^2 \cdot 9^3}{4}\right)^2 \cdot 3 = \frac{(8^2)^2 \cdot (9^3)^2}{(4)^2} \cdot 3 = \frac{8^4 \cdot 9^6 \cdot 3}{4^2} = \frac{(2^3)^4 \cdot (3^2)^6 \cdot 3}{(2^2)^2} =$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 3}{2^4} = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 3 \cdot 2^4 = 2^{16} \cdot 3^{13}$$

Ej.: Hallar el valor de $16^{1/2 + 1/4} - 1$

$$16^{1/2 + 1/4} - 1 = 16^{\frac{2+1}{4}} - 1 = 16^{3/4} - 1 = (2^4)^{3/4} - 1 = 2^3 - 1 =$$

$$= 8 - 1 = 7$$

Ej.: Operar la expresión: $(a^{1/3} - b^{1/3}) \cdot [a^{2/3} + (ab)^{1/3} + b^{2/3}]$

$$(a^{1/3} - b^{1/3}) \cdot (a^{2/3} + a^{1/3} + b^{1/3} + b^{2/3}) = a + a^{2/3}\, b^{1/3} +$$

$$+ a^{1/3}\, b^{2/3} - a^{2/3}\, b^{1/3} - a^{1/3}\, b^{2/3} - b = a - b$$

TEMA 14

INTRODUCCION A LOS POLINOMIOS
INDICE (1.ª Parte)

1.–EXPRESIONES ALGEBRAICAS.
2.–CONCEPTO DE MONOMIO.
3.–CONCEPTO DE POLINOMIO.
4.–OPERACIONES CON POLINOMIOS.
- A.–Suma de polinomios.
- B.–Diferencia de polinomios.
- C.–Multiplicación de polinomios.
- D.–División de polinomios con una variable o letra.
- E.–División de polinomios con dos o más variables o letras.
- F.–División de polinomios por $x - a$. Regla de Ruffini.

5.–DIVISIBILIDAD CON POLINOMIOS.
6.–MAXIMO COMUN DIVISOR DE VARIOS POLINOMIOS.
- A.–M.C.D. de monomios.
- B.–M.C.D. de polinomios.

7.–MINIMO COMUN MULTIPLO DE VARIOS POLINOMIOS.
- A.–M.C.M. de monomios.
- B.–M.C.M. de polinomios.

8.–TEOREMA DEL RESTO.
9.–TEOREMA DEL FACTOR.
10.–DIVISION DE $x^n \pm a^n$ ENTRE $x \pm a$.
11.–FACTOR COMUN DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA.
12.–DESARROLLOS POLINOMICOS NOTABLES.
- A.–Cuadrado de una suma polinómica.
- B.–Cuadrado de una diferencia polinómica.
- C.–Diferencia de cuadrados.
- D.–Cubo de una suma polinómica.
- E.–Cubo de una diferencia polinómica.

13.–SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.
14.–ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS POLINOMIOS.

TEMA 14

Un tren rápido de viajeros sale de Madrid con dirección a Vigo a una velocidad de 120 Km por hora.

En ese mismo momento sale de Vigo otro tren de mercancías en dirección contraria, es decir, con destino a Madrid, que circula a 60 Km por hora.

Cuando los dos se encuentran, ¿cuál de ellos estará más cerca de Madrid?

LA SOLUCION EN (pág. 256).

INTRODUCCION A LOS POLINOMIOS (1.ª Parte)

Este es uno de los pocos temas que se van a desarrollar en dos partes separadas e independientes a lo largo del desarrollo de la obra. La razón estriba en que para profundizar en la segunda parte, que recibirá el nombre de AMPLIACION DE POLINOMIOS (2.ª Parte), es necesario tener unos conocimientos que no se pueden precisar en este momento, y con el ánimo de que el estudioso vaya recibiendo en su mente los impactos de una forma sucesiva y ordenada.

1.–EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se entiende por expresión algebraica a cualquier combinación entre letras y números planteada con cualquier operación aritmética (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, ...)

Las expresiones algebraicas se clasifican de la siguiente forma:

Clasificación de las expresiones algebraicas
- Racionales
  - Enteras (1)
  - Fraccionarias (2)
- Irracionales (3)

(1) Son enteras cuando las letras no aparecen en el denominador o bajo el signo radical.

Ej.: $6a^3 + 5b - 7pq$

(2) Son fraccionarias cuando existen letras que aparecen en el denominador.

Ej.: $\frac{6a}{pq} + 7c - \frac{1}{3}$

(3) Son **irracionales** cuando existen letras que aparecen bajo el signo radical.

Ej.: $3ab - 5p + 7\sqrt[3]{a}$

Se entiende por **término** de una expresión algebraica a cada una de las expresiones que van separadas del resto por los signos + ó −.

Ej.: En la expresión algebraica $2a^3b - 5a + 3pq - 7$
Son términos $2a^3b$, $-5a$, $3pq$, -7

Se entiende por **coeficiente de un término** al número que está situado delante de las letras de cada término.

Ej.: El coeficiente del término $2a^3b$, es 2.

Se llama **valor numérico de una expresión algebraica** al número que resulta de sustituir cada letra de la expresión algebraica por un número.

Ej.: Hallar el valor numérico de $a^2 - 3ab + 5$ cuando $a = 1$ y $b = 2$

$$a^2 - 3ab + 5 = 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 = 0$$

Se entiende por **expresiones algebraicas equivalentes** a aquellas que tienen el mismo valor numérico para los mismos valores de sus letras.

2.–CONCEPTO DE MONOMIO

Se entiende por monomio a un conjunto de letras y números ligados por la operación de multiplicar o también a cualquier término de una expresión algebraica.

Ej.: Son monomios: $7a^3b$, $-\frac{5}{3}pq$, 7

Parte literal de un monomio es el conjunto de todas sus letras.

Coeficiente de un monomio es el número que indica las veces que se repite su parte literal (se suele exponer siempre delante de su parte literal).

Grado de un monomio es la suma de los exponentes de todas sus letras.

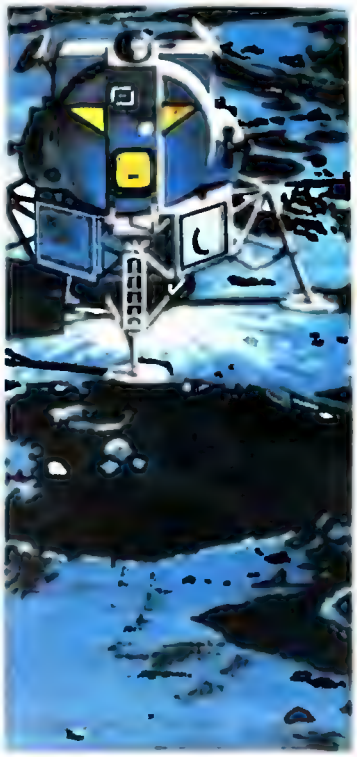
Si se pidiese el grado de un monomio respecto a una letra determinada, éste es el exponente de dicha letra.

Ej.: En el monomio $3a^4b^2c$ podemos decir:

Parte literal = a^4b^2c

Coeficiente = 3

Grado de monomio = 4 + 2 + 1 = 7



El espacio considerado desde el punto de vista de la Astronáutica se caracteriza por la falta de atmósfera, por lo que no presenta ninguna resistencia al avance de las cosmonaves ni provoca su calentamiento.

El punto donde comienza el espacio es muy difícil de determinar, ya que se intercala con la atmósfera terrestre.

A diecinueve kilómetros de altura la sangre humana hervirla en los vasos sanguíneos si no contara con protección; a los cuarenta kilómetros ya no existe oxígeno para que funcionen los motores de un avión y sólo funcionan los cohetes. A los cuarenta y cinco kilómetros desaparece el ozono y los rayos ultravioleta quemarían a una persona expuesta a ellos. En el viaje espacial el hombre deja su hábitat acostumbrado para introducirse en otro que le es completamente hostil. Además de comida y bebida necesita aire para respirar; los veinticinco litros de oxígeno que necesita diariamente los ha de llevar en estado líquido o producirlos a base de agua oxigenada u otro método.

Juguemos con los números. ¿Sabrías poner **diez** (10) con sólo 3 nueves (9-9-9-)?
Verás:

$$9 + \frac{9}{9} = 10$$

¿Y cien (100) con sólo 4 nueves (9-9-9-9)?

Sí: $\quad 99 + \frac{9}{9} = 100$

¿Pero me escribirías 71 con cuatro "cuatros" (4-4-4-4)? ¡Ya te pillé! Pues bien, es muy fácil.

$$\frac{4^{\circ} + 44 \text{ min}}{4} =$$

$$= 1^{\circ} + 11' = 60' + 11' = 71'$$

y también:

$$\frac{4 \times 60 + 44}{4} = \frac{240 + 44}{4} = \frac{284}{4} = 71$$

Monomios Homogéneos son los que tienen el mismo grado.

Ej.: $7a^3b$ y $8a^2b^2$

Monomios Semejantes son los que tienen la misma parte literal aunque sus coeficientes y signos sean diferentes y consecuentemente el mismo grado. (Para sumar o restar monomios es necesario que sean semejantes.)

Ej.: $6a^2b^2$ y $7a^2b^2$

3.—CONCEPTO DE POLINOMIO

Se entiende por polinomio a cualquier conjunto de monomios ligados por los signos + ó —, es decir, a cualquier expresión algebraica.

Ej.: Es un polinomio: $3a^3b + 5ab - 7a + 5$

Grado de un polinomio es el grado de su mayor monomio.

Ej.: Hallar el grado del polinomio:

$$3a^4b - 5a^6b + 3ab - 6$$

Grado de $3a^4b = 4 + 1 = 5$

Grado de $-5a^6b = 6 + 1 = 7$

Grado de $3ab = 1 + 1 = 2$

Grado de $-6 = 0$

Luego, como el grado de un polinomio es el grado de su mayor monomio, decidimos que el grado del polinomio en cuestión es 7.

Polinomio ordenado es aquel que tiene dispuestos sus términos o monomios de mayor a menor grado o de menor a mayor grado indistintamente.

Ej.: Ordenar el polinomio $3a^3b - 5a^7b + 4p^5 - 6$; lo ordenamos de mayor a menor grado:

$$-5a^7b + 4p^5 + 3a^3b - 6$$

Polinomio completo es aquel polinomio que contiene todos los grados de monomios desde el de mayor grado hasta el de menor grado o grado cero, que corresponde a las constantes o **término independiente**.

Ej.: El polinomio $4x^3 + 5x^2 + 7x - 3$ es un polinomio completo.

Polinomios homogéneos son aquellos que tienen sus términos o monomios del mismo grado.

Ej.: El polinomio $2x^4 - 3x^2y^2 + 7x^3y$ es homogéneo por tener todos sus monomios homogéneos, es decir, de grado 4 en este caso.

NOTA.—Cuando un polinomio consta de dos monomios se llama también binomio, si consta de tres monomios se le llama **trinomio**, así sucesivamente, aunque en general reciban el nombre de polinomios.

4.—OPERACIONES CON POLINOMIOS

A.—Suma de polinomios.

Para sumar polinomios debemos de sumar entre sí los monomios semejantes (los que tienen la misma parte literal) y únicamente éstos, ya que son los que admiten agruparse. Los monomios que no sean semejantes se expondrán en el polinomio suma, tal como los proponían.

Ej.: Sumar los polinomios:

$$3a^3b - 5a^2b + 6ab - 5 \text{ y } 4a^3b + 3a^2b + 6ab^2 - 7ab + 8$$

Podemos recurrir a dos métodos:

— Poniendo un polinomio debajo del otro, intentando que los términos semejantes estén uno debajo del otro.

$$\begin{array}{rl} & 3a^3b - 5a^2b + 6ab - 5 \\ + & 4a^3b + 3a^2b - 7ab + 8 + 6ab^2 \\ \hline & 7a^3b - 2a^2b - ab + 3 + 6ab^2 \end{array}$$

— Poniendo un polinomio a continuación del otro y teniendo cuidado al ir sumando los respectivos monomios semejantes.

$$3\underline{a^3b} - 5\underline{\underline{a^2b}} + 6\underline{\underline{\underline{ab}}} - \underline{\underline{\underline{5}}} + 4\underline{a^3b} + 3\underline{\underline{a^2b}} + 6ab^2 - 7\underline{\underline{\underline{ab}}} + \underline{\underline{\underline{8}}} =$$

$$= 7a^3b - 2a^2b - ab + 3 + 6ab^2$$

B.—Diferencia de polinomios.

El procedimiento es lo mismo que la suma, sólo que teniendo en cuenta que el signo negativo va a producir un cambio de signo en todos los monomios del segundo polinomio o sustraendo, manteniéndose el primer polinomio o minuendo tal como nos lo presentan.

Ej.: Restar los polinomios:

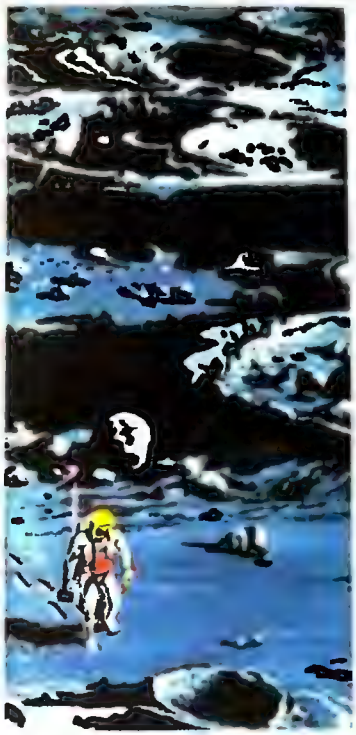
$$6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6 \quad \text{y} \quad 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 5.$$

Podemos recurrir a dos métodos:

— Poniendo un polinomio debajo del otro intentando que los términos semejantes estén uno debajo del otro.

$$\begin{array}{rl} & 6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6 \\ - & 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 5 \\ \hline & 3x^4 - 7x^3 + 7x^2 - x - 1 \end{array}$$

— Poniendo un polinomio a continuación del otro y teniendo presente que habrá que cambiar de signo a todos los monomios



La Astronáutica es algo que hemos contemplado y experimentado, gracias al gran avance de la ciencia.

Pensemos, por ejemplo, que la Luna, nuestro Satélite, se encuentra a cerca de 400.000 Km de nosotros; el planeta Marte se halla de la Tierra a unos 78 millones de Km, como planeta más cercano a la Tierra.

Hemos observado cómo gracias a la Astronáutica el hombre ya ha pisado la Luna. El único procedimiento por el cual el hombre pudo ir a la Luna ha sido a través de satélites artificiales. Estos satélites llevan unos cohetes en cadena que sirven como propulsión para elevar la nave o satélite artificial de la Tierra. Conforme se va alejando la nave, la propulsión de dichos cohetes va disminuyendo debido a que la atracción terrestre es cada vez menor. Ha habido satélites que han ido a la Luna y además tripulados por el hombre. Hay satélites que en este mismo momento se están dirigiendo a Marte sin tripulación. El gigantesco avance de esta ciencia hace que lleguemos a pensar que no está lejano el día en el cual algunos satélites puedan ir tripulados a este planeta.

del segundo polinomio o sustraendo, con lo que la operación se transforma después en suma:

$$6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6 - (3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x - 5) =$$
$$= 6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6 - 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 5 =$$
$$= 3x^4 - 7x^3 + 7x^2 - x - 1$$

C.—Multiplicación de polinomios.

Para multiplicar polinomios es indiferente empezar a hacerlo por la derecha, por la izquierda o por cualquier término intermedio. Nosotros comenzaremos a hacerlo por la izquierda, ya que las multiplicaciones se extienden hacia el lado contrario de donde se empieza.

Multiplicaremos cada uno de los monomios de uno de los polinomios por todos los monomios del otro polinomio.

Al efectuar el producto de monomio a monomio, multiplicaremos primero los signos de éstos (utilizando el criterio de signos para el producto), luego sus coeficientes y después sus partes literales, donde tendremos que hacer uso de la potenciación (es decir, que surgirán productos de potencias de la misma base y tendremos que sumar los exponentes de sus letras respectivas).

Al ir multiplicando cada monomio de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio tendremos presente el ir colocando todos los monomios semejantes que surjan unos debajo de otros, dejando huecos cuando sea necesario debido a que falte un grado para completar el polinomio, para luego poder efectuar la suma con comodidad, lo mismo que si se tratase de una multiplicación numérica.

Ej.: Multiplicar los polinomios:

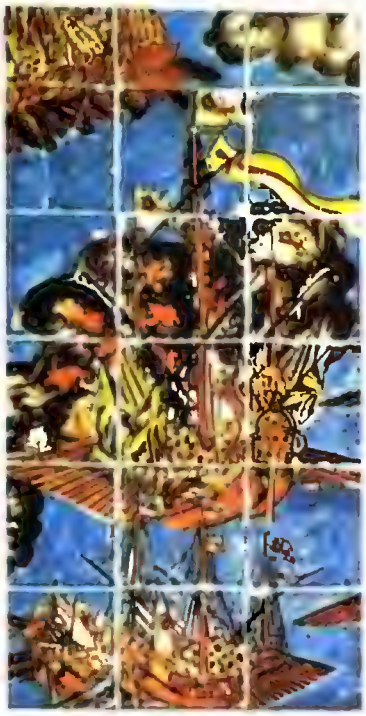
$6x^3 + 5x^2 - 6x + 1$ y $-x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

$$\begin{array}{r}
6x^3 + 5x^2 - 6x + 1 \\
-x^3 + 2x^2 + 3x - 2 \\
\hline
-6x^6 - 5x^5 + 6x^4 - x^3 \\
12x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 2x^2 \\
18x^4 + 15x^3 - 18x^2 + 3x \\
-12x^3 - 10x^2 + 12x - 2 \\
\hline
-6x^6 + 7x^5 + 34x^4 - 10x^3 - 26x^2 + 15x - 2
\end{array}$$

Ej.: Multiplicar los polinomios:

$2a^3 + 3a^2b - ab^2 + 2b^3$ y $3a^2 - 2ab + 5b^2$

$$\begin{array}{r}
2a^3 + 3a^2b - ab^2 + 2b^3 \\
3a^2 - 2ab + 5b^2 \\
\hline
6a^5 + 9a^4b - 3a^3b^2 + 6a^2b^3 \\
-4a^4b - 6a^3b^2 + 2a^2b^3 - 4ab^4 \\
10a^3b^2 + 15a^2b^3 - 5ab^4 + 10b^5 \\
\hline
6a^5 + 5a^4b + a^3b^2 + 23a^2b^3 - 9ab^4 + 10b^5
\end{array}$$



Arquímedes, el gran matemático y físico griego que vivió hace más de 2.000 años, utilizó la energía solar como arma. Según varios escritores antiguos, reflejó los rayos del sol sobre la flota romana cuando ésta se dirigía contra su ciudad natal de Siracusa, y la incendió. Esto ocurría sobre el año 215 antes de J.C.

Pero aquellos testimonios no ofrecían credibilidad. No obstante el doctor Ioannis Sakkas, ingeniero griego, realizó una serie de experiencias que demostraron la posibilidad del hecho.

Enfocó 50 espejos pintados de color de bronce sobre una pequeñe embarcación de remos y reflejó sobre ella los rayos de sol. En unos segundos comenzó a humear y al cabo de dos minutos la embarcación rompió en llemas.

Ej.: Multiplicar los polinomios:

$$2x^3 + 4xy^2 - y^3 \quad \text{por} \quad x + 2y$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 4xy^2 - y^3 \\ x + 2y \\ \hline 2x^4 + 4x^2y^2 - xy^3 \\ 8xy^3 + 4x^3y - 2y^4 \\ \hline 2x^4 + 4x^2y^2 + 7xy^3 + 4x^3y - 2y^4 \end{array}$$

Hay veces que cuando uno de los polinomios tiene una cantidad de términos pequeña, se suelen multiplicar también en línea, como puede ser este caso:

$$(x + 2y)(2x^3 + 4xy^2 - y^3) = 2x^4 + 4x^2y^2 - xy^3 + 4x^3y +$$

$$+ 8xy^3 - 2y^4 = 2x^4 + 4x^2y^2 + 7xy^3 + 4x^3y - 2y^4$$

D.– División de polinomios con una variable o letra.

Para dividir dos polinomios, el polinomio dividendo tiene que ser de mayor o igual grado que el polinomio divisor.

Una división polinómica admite como prueba la ya conocida de la división (dividendo = divisor · cociente + resto).

Antes de empezar a realizar una división polinómica es necesario asegurarse de que los polinomios dividendo y divisor están ordenados en sentido decreciente (de mayor a menor grado todos sus términos).

Una vez realizadas las comprobaciones precedentes, comenzaremos a realizar la división, ajustándose a los siguientes criterios:

— Cada uno de los términos del cociente se obtiene dividiendo el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor, incluidos los signos de ambos. Esto se realiza para ir reduciendo el grado del polinomio dividendo (en las divisiones numéricas se va reduciendo el valor del número dividendo, en los polinomios el grado del polinomio dividendo).

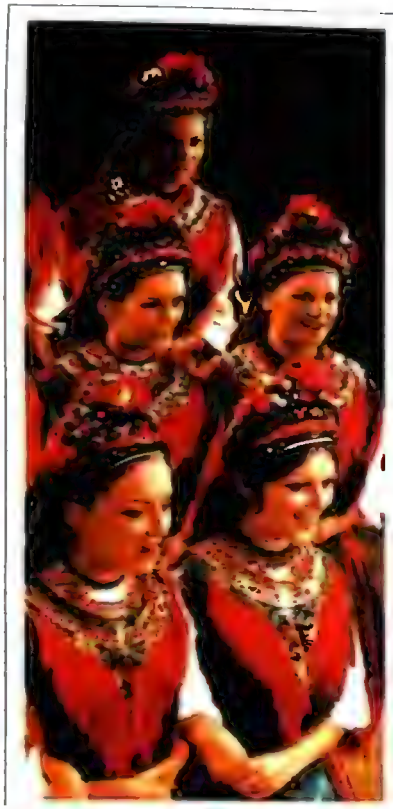
— Una vez obtenido uno de los términos procedemos como en las divisiones numéricas ordinarias, multiplicando este término obtenido por todo el divisor y colocando el resultado debajo del dividendo para restárselo (es norma que el resultado obtenido de multiplicar el término del cociente por el divisor sea cambiado de signo y al ponerlo debajo del dividendo operamos sumando y no restando, con objeto de facilitar la labor operativa).

— Una vez sumado el dividendo con el resultado de multiplicar el término del cociente por el divisor cambiado de signo, se obtiene un nuevo dividendo con el que procedemos sucesivamente de igual forma.

El monte de Boeckstein en la provincia de Salzburgo (Austria) comenzó siendo un filón de oro y ha terminado como un magnífico lugar de curación para el reuma.

A la cueva se entra por una especie de gruta que se abre en las faldas del monte. Según se penetra en el interior, la temperatura va aumentado hasta llegar hasta los 40 grados. Una humedad densa llena de sudor los cuerpos de una forma inaguantable. Los investigadores científicos han descubierto que la radioactividad de este monte es enorme. Un periodista francés contó sus impresiones después de una visita a la montaña. Dice el periodista en cuestión que después de proveerse de un traje de baño tomó un tren liliputiense que de pronto comenzó a meterse en un túnel. Con ayuda de las linternas se podían ver los desgastes y hendiduras causados por los buscadores de oro. Un guía les informó que de aquellas paredes habían sido extraídos más de 300 kilos de oro. Cuando se había adentrado 600 metros y la temperatura había aumentado, un señor con el torso desnudo les invitó a bajar. Al llegar a unos 1.400 m. de recorrido el tren se detiene; en este lugar es donde la temperatura llega a 40 grados.

Este ambiente, sin embargo, es perjudicial para la tuberculosis, el cáncer y las enfermedades cardíacas. Antes de admitir al que quiere someterse a la cura de esta montaña, se le hace un riguroso examen médico. La cura incluye un tratamiento de cuatro semanas. Hay que estar dos horas cada sesión en el corazón de la montaña. La temperatura sólo dura de mayo a octubre.



En el teatro griego, la orquesta era lugar de la escena más próximo al público. Allí evolucionaba el coro, elemento imprescindible de aquellas manifestaciones teatrales.

En el Renacimiento se volvió apasionadamente a valorar el arte clásico de Grecia y Roma tratando de reconstruir la Tragedia antigua, y así se llamó orquesta al lugar que entre la escena y el público ocupaban los músicos instrumentistas. Finalmente se pasó a designar con este nombre a los propios músicos ejecutantes. Desde el siglo XVI, aquella palabra "orquesta" era empleada para designar a un grupo numeroso de instrumentistas musicales. Hoy se emplea en un sentido más limitado: sirve para designar un conjunto instrumental en el que figuren instrumentos de cuerda, de viento y de percusión.

— La división se termina cuando el polinomio dividendo se hace de menor grado que el divisor, en este caso lo que queda de dividendo es el resto.

Ej.: Dividir:

$x^5 + 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$ entre $x^3 - 2x^2 + x + 2$

$$
\begin{array}{r}
x^5 + 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1 \\
-x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 \\
\hline
4x^4 - 5x^2 + x - 1 \\
-4x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 8x \\
\hline
8x^3 - 9x^2 - 7x - 1 \\
-8x^3 + 16x^2 - 8x - 16 \\
\hline
7x^2 - 15x - 17
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + x + 2 & \\
\hline
x^2 + 4x + 8 & \\
\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow & \\
x^5 \quad 4x^4 \quad 8x^3 & \\
\overline{x^3} \quad \overline{x^3} \quad \overline{x^3} &
\end{array}
$$

Ej.: Dividir:

$3x^6 - 2x^7 + x - 3x^2 + 5$ entre $x^4 + x - 2x^3 + 1$

Obsérvese que los polinomios no están ordenados, así que para comenzar la división los expondremos ordenados, y en el dividendo dejaremos un hueco donde no exista término de grado correspondiente. En el divisor no hace falta dejar huecos aunque falten grados de términos.

$$
\begin{array}{r}
-2x^7 + 3x^6 \qquad\qquad - 3x^2 + x + 5 \\
2x^7 - 4x^6 + 2x^4 + 2x^3 \\
\hline
-x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 5 \\
x^6 - 2x^5 + x^3 + x^2 \\
\hline
-2x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 5 \\
2x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 2x \\
\hline
-2x^4 + 3x^3 + 3x + 5 \\
2x^4 - 4x^3 + 2x + 2 \\
\hline
-x^3 + 5x + 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 + x + 1 & \\
\hline
-2x^3 - x^2 - 2x - 2 & \\
\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow & \\
-2x^7 \quad -x^6 \quad -2x^5 \quad -2x^4 & \\
\overline{x^4} \quad \overline{x^4} \quad \overline{x^4} \quad \overline{x^4} &
\end{array}
$$

Ej.: Dividir:

$a^3 - 2a^2 + 5$ entre $a^2 - 2$

$$
\begin{array}{r}
a^3 - 2a^2 + 5 \\
-a^3 - 2a \\
\hline
-2a^2 - 2a + 5 \\
2a^2 - 4 \\
\hline
-2a + 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
a^2 - 2 & \\
\hline
a - 2 & \\
\updownarrow \quad \updownarrow & \\
a^3 \quad -2a^2 & \\
\overline{a^2} \quad \overline{a^2} &
\end{array}
$$

Ej.: Dividir:

$x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ entre $2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2 & 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \\ \hline -x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x - 2 \\ \hline -4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 2 & \\ 4x^3 + 8x^2 - 6x + 2 & \\ \hline \frac{21}{2}x^2 - \frac{19}{2}x + 4 & \end{array}$$

$\frac{x^4}{2x^3}$ $\frac{-4x^3}{2x^3}$

Obsérvese que en las divisiones polinómicas, en las que el coeficiente del término de mayor grado del divisor es distinto de 1 ó −1, es probable que surjan coeficientes fraccionarios, como ocurre en esta división.

De todas formas, la operativa es igual que en las divisiones anteriores, con la consecuencia lógica de que se complica al tener que sumar fracciones en lugar de números enteros.

Ej.: Dividir: $2x^6 - 3x^5 + 2x^2 - 2$ entre $3x^3 - x + 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^6 - 3x^5 \quad 2x^2 - 2 & 3x^3 - x + 1 \\ \hline -2x^6 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 & \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} \\ \hline -3x^5 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2 & \\ 3x^5 \quad x^3 + x^2 & \\ \hline \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2 & \\ -\frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{9}x & \\ \hline -\frac{1}{3}x^3 + \frac{29}{9}x^2 - \frac{2}{9}x - 2 & \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{9} & \\ \hline \frac{29}{9}x^2 - \frac{3}{9}x - \frac{17}{9} & \end{array}$$

$\frac{2x^6}{3x^3}$ $\frac{-3x^5}{3x^3}$ $\frac{\frac{2}{3}x^4}{3x^3}$ $\frac{\frac{1}{3}x^3}{3x^3}$

1.—División de polinomios con dos o más variables o letras.

En estos casos efectuaremos la división considerando una letra de las varias que pueden existir en los polinomios y que recibe el nombre de variable o letra ordenatriz. El resto de las letras de las que conste el polinomio las consideraremos como constantes o números a efectos de dividir.

NOTA.—Hay que hacer notar, que lo mismo que en las divisiones anteriores, ésta finalizará cuando el polinomio dividendo respecto a la letra ordenatriz sea de menor grado que el divisor respecto a dicha letra ordenatriz.

En las primeras orquestas ningún orden ni principio lógico presidía la agrupación de los instrumentos musicales.

En la Edad Media se clasificaban en dos grandes grupos: altos y ruidosos y bajos o dulces. A los primitivos instrumentos de origen grecorromano o bárbaro —el caramillo, la flauta, la cítara, el salterio...— se fueron añadiendo los instrumentos de arco, los de cuerdas pulsadas, éstos importados de Oriente como el laúd y la guitarra. Andando el tiempo la primitiva heterogeneidad se disciplina, ordena y se constituyen familias instrumentales. Desde la segunda mitad del siglo XVIII el conjunto orquestal tiende a equilibrarse y ordenarse de forma que la mitad de los músicos mire a la otra mitad y que todos den la cara al público en lugar de ejecutar de espalda a él. En general ese conjunto que hoy se mantiene agrupado en forma semicircular ante el director puede variar con el tiempo y las costumbres.

CURIOSIDADES

¿Cuántas veces nos dice la Biblia que todos los hombres somos hermanos? Muchísimas. Como creemos que casi todo se puede demostrar matemáticamente, vamos a ver incluso esto:

1.º) Partiendo de la base de que cada persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos..., etc.

2.º) Solamente partiendo desde el nacimiento de Jesucristo y concediéndole a cada siglo tres generaciones (una generación cada 33 años, más las últimas 3 generaciones de este siglo XX), tenemos:

$$20 \times 3 + 3 = 63$$

Tendríamos entonces que todos nosotros tenemos tantos antepasados como 2^{63}. ¡¡Ya tenemos otra vez el dichosito problema del ajedrez!!

Si algún alumno lo quiere calcular y después de calculado sigue diciendo que "todos los hombres no somos hermanos" es que es imbécil.

Sin embargo, este polinomio resto, respecto a todo el conjunto de letras de que conste el polinomio, puede ser de mayor, igual o menor grado que el divisor. Naturalmente, si efectuamos la división respecto a cualquier otra letra ordenatriz, el cociente y el resto de la división serán distintos.

Ej.: Efectuar la división:

$$4x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - a^4 \quad \text{entre} \quad x^2 - 3ax + a^2$$

Consideremos como letra ordenatriz a la x, por lo tanto dividiremos y ordenaremos los polinomios respecto a esta letra, manteniendo las restantes como constantes.

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - a^4 & x^2 - 3ax + a^2 \\
\cline{2-2}
-4x^2 + 12ax^3 - 4a^2x^2 & 4x^2 + 10ax + 29a^2 \\
\cline{1-1}
10ax^3 - a^2x^2 - a^4 & \\
-10ax^3 + 30a^2x^2 - 10a^3x & \\
\cline{1-1}
29a^2x^2 - 10a^3x - a^4 & \\
-29a^2x^2 + 87a^3x - 29a^4 & \\
\cline{1-1}
77a^3x - 30a^4 & \\
\end{array}$$

Ej.: Dividir los polinomios:

$$(t+1)x^3 - tx^2 + t \quad \text{entre} \quad tx^2 - (t-1)x + 2$$

Consideraremos como letra ordenatriz a la x.

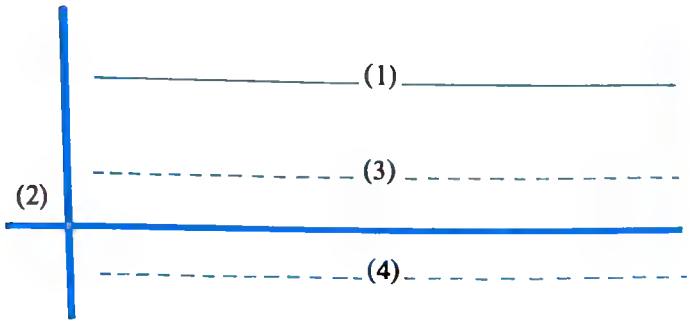
$$\begin{array}{r|l}
(t+1)x^3 - tx^2 + t & tx^2 - (t-1)x + 2 \\
\cline{2-2}
-(t+1)x^3 - \dfrac{(t-1)(t+1)}{t}x^2 & \dfrac{t+1}{t}x - \dfrac{2t^2-1}{t^2} \\
\cline{1-1}
-\dfrac{2t^2-1}{t}x^2 + t & \\
+\dfrac{2t^2-1}{t}x^2 + \dfrac{(2t^2-1)(t-1)}{t^2}x + 2\dfrac{2t^2-1}{t^2} & \\
\cline{1-1}
\dfrac{(2t^2-1)(t-1)}{t^2}x + \dfrac{t^3+4t^2-2}{t^2} & \\
\end{array}$$

F.–División de polinomios por x – a. Regla de Ruffini.

Entre las aplicaciones que tiene la división de polinomios (que observaremos quizás con más detalle en la 2.ª parte del tema) existe una muy concreta y que se utiliza en Matemáticas con gran frecuencia.

Es decir, hasta ahora el polinomio divisor de una división podía ser cualquiera. Pues bien, cuando el divisor es un binomio de la forma x – a ó x + a, pudiendo ser, a, un número cualquiera positivo o negativo, surge una división que se puede realizar de dos formas: la primera forma es realizar la división por los procedimientos anteriormente expuestos y la segunda aplicar la regla de Ruffini. Esta regla se basa en los siguientes criterios prácticos:

— Se utiliza un esquema como el que se expone a continuación.



En la fila (1) se colocan todos los coeficientes del polinomio dividendo ordenados de mayor a menor grado, poniendo un cero en los lugares correspondientes en donde falte algún grado consecutivo.

En el hueco (2) se coloca el número a del polinomio divisor x — a, cambiado de signo.

El primer coeficiente de la fila (1) se baja exactamente igual a la fila (4).

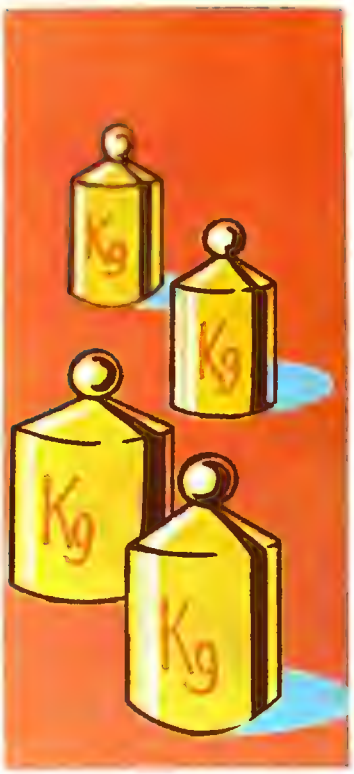
Una vez realizadas estas maniobras, el esquema de Ruffini está preparado para manipularle.

— Comenzaremos las operaciones ajustándonos al siguiente esquema de cálculo: cada número de (4) lo multiplicaremos siempre por (2) y el resultado lo colocamos en la fila (3) desplazado un lugar respecto al número que he utilizado de (4). Sumamos el resultado colocado en (3) con el número que esté encima de él en (1) y lo bajamos a (4), y repetimos la operación sucesivamente hasta que no queden más posibilidades operativas.

Ej.:

	4	2	5
		12	42
3			
	4	14	47

Finalizado el proceso, todos los números que aparecen en (4), excepto el último de la fila, comprenden a los coeficientes del polinomio cociente, siendo siempre el primer coeficiente de un grado inferior al que tenía el polinomio dividendo.



¿Podemos, solamente con cuatro pesas distintas, realizar pesadas desde 1 a 40 Kg, y claro, por supuesto, esas pesas combinarlas en los dos platillos de la balanza?

¿De cuántos Kilogramos sería cada una de las pesas para poder realizar, repetimos, de 1 a 40 Kg.?

LA SOLUCION EN (pág. 256).

El comercio que fue el impulsor de casi todos los sistemas matemáticos fue iniciado por los Cretenses, Fenicios, Cartagineses y Romanos.

En la edad media fueron las repúblicas italianas y los mercaderes constituidos en grandes agrupaciones los que dominaron gran parte del tráfico de mercancías entre los países cristianos y los países orientales.

En el siglo XV los españoles, buscando rutas nuevas para este intercambio, descubrieron América, creándose así un amplio abanico de posibilidades para cambiar productos del Viejo al Nuevo Continente.

Los productos manufacturados salían de nuestros puertos, a cambio de materias primas, metales preciosos, etc., obligando a crear redes de oficinas con personas expertas en cálculo y contabilidad.

El último número que aparece en la fila (4) es siempre el resto de la división que, lógicamente, tiene que ser un número solo, ya que el divisor, como tiene que ser de grado uno $(x - a)$, para poder aplicar la regla de Ruffini, el resto tiene que ser de grado inferior, y lógicamente cualquier grado inferior a uno debe ser un polinomio de grado cero, que es un número.

Ej.: Dividir: $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ entre $x - 2$

Para que observemos la situación, se va a realizar la división por los dos procedimientos:

— Por el procedimiento general:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 & x - 2 \\ \cline{2-2} -5x^3 + 10x^2 & 5x^2 + 8x + 19 \\ \cline{1-1} \quad 8x^2 + 3x + 1 & \\ -8x^2 + 16x & \\ \cline{1-1} \quad 19x + 1 & \\ -19x + 38 & \\ \cline{1-1} \quad 39 & \end{array}$$

— Por la regla de Ruffini:

	5	−2	3	1
2		10	16	38
	5	8	19	39 = Resto

Cociente $= 5x^2 + 8x + 19$

Ej.: Dividir por Ruffini: $x^7 + 2x^5 - 3x^4 - 5$ entre $x + 1$

Nótese que faltan grados intermedios en el polinomio dividendo y que habrá que sustituir sus huecos por ceros en los lugares donde corresponda.

Es decir, que el polinomio completo es de la forma:

$$x^7 + 0x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 5$$

	1	0	2	−3	0	0	0	−5
−1		−1	1	−3	0	0	0	0
	1	−1	3	0	0	0	0	−5 = Resto

Cociente:

$x^6 - x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = x^6 - x^5 + 3x^4$

Ej.: Dividir por Ruffini: $3x^4 + 2x^3 + x - 6$ entre $x - 1$

	3	2	0	1	−6
1		3	5	5	6
	3	5	5	6	0 = Resto

Cociente: $3x^3 + 5x^2 + 5x + 6$

En este caso la división es exacta, ya que el resto es cero.

Ej.: Dividir por Ruffini: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ | $x + y + z$

Estamos ante un caso de polinomios de más de una variable o letras. De todas formas, si consideramos como letra ordenatriz a la x, las demás las mantendremos como constantes y entonces el divisor adopta la forma $x + (y + z)$ adecuada para efectuar la división por Ruffini.

	1	0	$-3yz$	$y^3 + z^3$
$-(y + z)$		$-(y + z)$	$y^2 + z^2 + 2yz$	$-y^3 - z^3$
	1	$-(y + z)$	$y^2 + z^2 - yz$	0 = Resto

Cociente: $x^2 - (y + z)x + y^2 + z^2 - yz$

5.–DIVISIBILIDAD CON POLINOMIOS

Hasta ahora hemos tratado la división de polinomios de forma general, es decir, que no importaba que fuesen exactas o no exactas.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{R(x)} \left| \frac{Q(x)}{C(x)} \right.$$

El nacimiento de las ciudades marcó en la Edad Media el comienzo de una nueva era en la historia de Europa.

La sociedad había tenido hasta entonces dos clases privilegiadas: el clero y la nobleza; la naciente burguesía completa con su actividad el esquema.

La formación de concentraciones urbanas conmocionó de manera fulminante la organización económica del sector agrícola. La producción tal y como se practicaba hasta entonces sólo servía para cumplir con el señor feudal y procurar alimentos al propio campesino y su familia. Pero he aquí que la demanda se anima; que de pronto ven la posibilidad de vender en las ciudades todo lo que llevan.

Su trabajo adquiere una nueva significación. Desde finales del siglo XI los monasterios y los señores transforman sus terrenos estériles en tierras productivas; se fundan por doquier ciudades nuevas y para atraer a los cultivadores se exime a éstos de ciertas cargas, disfrutan de una autonomía local. El comercio cubre ahora todas las necesidades; no es preciso producir de todo; basta con acudir a la ciudad contigua o a otras para adquirirlo. El arte de vender, pesar, medir, en suma, la matemática usual empieza a ser utilizada con gran intensidad.

Paseando por el campo me praguntaron un día (ya que yo era muy aficionado a las matemáticas y a sus divertimentos) si podía realizar un problema raspecto a por ejemplo ... mi edad. Yo contesté al cabo de un rato:

Si tomáis cinco veces los años que tendré dantro de cinco años y a éstos les restáis cinco veces los años que tenía hace cinco años resultará mi edad exacta.

LA SOLUCION EN (pág. 256).

Pues bien, lo que nos ocupa ahora es que las divisiones sean exactas, es decir, que $R(x) = 0$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P(x)}{\underbrace{0}} \left| \frac{Q(x)}{C(x)} \right.$$

La divisibilidad algebraica posee diferencias con respecto a la divisibilidad numérica, diferencias que vamos a analizar y que podemos considerar como muy importantes.

a) Cualquier polinomio entero es siempre divisible por cualquier número o constante, distinto de cero.

Los números o polinomios de grado cero actúan en la divisibilidad de polinomio lo mismo que lo hace la unidad en la divisibilidad numérica. (En la divisibilidad numérica, la unidad es divisor de cualquier número. En la divisibilidad algebraica, cualquier número es divisor de cualquier polinomio).

Ej.:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3x + 2 & 5 \\ \hline -x^2 & \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{2}{5} \\ \hline -3x + 2 & \\ 3x & \\ \hline +2 & \\ -2 & \\ \hline \underbrace{0} & \end{array}$$

b) Cualquier polinomio P (x) que sea divisible por otro polinomio Q (x), también es divisible por el divisor Q (x) multiplicado por un número cualquiera K distinto de cero.

$$P(x) \left| \frac{Q(x)}{\underbrace{0} \quad C(x)} \right. \Rightarrow P(x) \left| \frac{K \cdot Q(x)}{\underbrace{0} \quad \frac{1}{K} \cdot C(x)} \right. \Rightarrow P(x) \left| \frac{\frac{1}{K} \cdot Q(x)}{\underbrace{0} \quad K \cdot C(x)} \right.$$

Obsérvese que si multiplicamos el divisor por un número, el cociente de la división sale siempre multiplicado por su inverso.

Ej.: Dividir por Ruffini: $15x^2 - 7x - 2$ entre $3x - 2$

Para dividir por Ruffini, era condición indispensable que el polinomio divisor fuese de la forma $x - a$ ó $x + a$, es decir, que la x del binomio divisor debía de llevar por coeficiente la unidad, asunto que en el ejemplo propuesto no es cierto.

Así que para poder efectuar la división por Ruffini, es necesario que el coeficiente de x sea 1, y esto lo conseguimos utilizando la circunstancia de que podemos multiplicar el binomio divisor por cualquier número. En este caso, tendremos que dividir $3x - 2$ por 3 para que el coeficiente de x sea 1, es decir, dividir por 3, es lo mismo que multiplicar por 1/3, obteniendo como nuevo binomio divisor a $x - \frac{2}{3}$.

De todas formas, antes de efectuar la división por Ruffini, vamos a hacerla por el procedimiento ordinario en los dos casos, considerando como divisor $3x - 2$ y después $x - \frac{2}{3}$ para que observemos las diferencias existentes.

$$\begin{array}{r|l} 15x^2 - 7x - 2 & 3x - 2 \\ \hline -15x^2 + \frac{30}{3}x & \frac{15}{3}x + 1 \\ \hline 3x - 2 & \\ -3x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$15x^2 - 7x - 2 = (3x - 2)\left(\frac{15}{3}x + 1\right)$$

$$(15x + 3) = 3\left(\frac{15}{3}x + 1\right)$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(3x - 2)$$

$$\begin{array}{r|l} 15x^2 - 7x - 2 & x - \frac{2}{3} \\ \hline -15x^2 + \frac{30}{3}x & 15x + 3 \\ \hline 3x - 2 & \\ -3x + \frac{6}{3} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$15x^2 - 7x - 2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(15x + 3)$$

Pasemos ahora a la división de Ruffini, propiamente dicha.

$$15x^2 - 7x - 2 \;\big|\; 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad 15x^2 - 7x - 2 \;\big|\; x - \frac{2}{3}$$

Méjico, que es una de las mayores ciudades de Hispanoamérica, está hundiéndose a razón de cuarenta y ocho centímetros por año. ¿Cómo puede explicarse el fenómeno? Sólo se sabe de manera vaga que por el año 1325 los aztecas del valle de Méjico habían establecido una ciudad en lo que es hoy la ciudad de Méjico.

Dice la leyenda que los aztecas que descendían del Norte fundaron allí una ciudad en el sitio profetizado por sus sacerdotes, el lugar donde encontraron un águila sujetando entre sus garras una serpiente, el símbolo que hoy se usa en el escudo de armas de la República. También se sabe que este sitio era una isla en el cielo de un grupo de lagos de la elevada altiplanicie mejicana (2.130 m. sobre el nivel del mar). Lentamente, a través de los siglos, primero los aztecas y luego los españoles rellenarían el área de la ciudad con suelo volcánico tomado de las montañas circundantes. Hasta hoy sólo quedan en el valle los vagos restos de uno de los lagos que en él existieron. El subsuelo de la ciudad contiene una gran cantidad de agua y sólo debe su apariencia sólida a la naturaleza porosa del suelo, y de las rocas de origen volcánico que han cubierto las áreas lacustres originales.

El ingeniero Eduardo Molina explicó lo que estaba sucediendo: a pesar de que los acueductos traen a Méjico más de la mitad del agua que ésta consume, existen cerca de 75 bombas públicas de pozo profundo y más de dos mil bombas pequeñas empleadas por particulares o empresas privadas, para subvenir a la creciente demanda de agua en la metrópoli. A medida que se bombea agua se hunde el suelo y con él los edificios. Las calles se agrietan y se inclinan.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LAS SANDIAS DE LA PAGINA 211.

La relación entre los perímetros o longitudes de la circunferencia es igual a la de sus diámetros respectivos.

El perímetro de la primera sandía es 80 cm y el de la segunda 40 cm. Entonces la relación entre sus diámetros será de:

$$\frac{80}{40}=\frac{8}{4}=2$$

El **volumen** de la mayor con relación a la menor será de $2^3 = 8$ veces **más.**

Como nos piden tres veces más por la mayor, claro está que debemos de comprar ésta, ya que en realidad nos deberían de cobrar OCHO VECES MAS.

NOTA: Por supuesto, la mejor manera de vender este producto y similares es al **peso.**

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA EDAD DE LA PAGINA 220

Bien, llamemos x a la edad. Dentro de 3 años tendrá x + 3 que multiplicándolo por 3 ya tenemos la primera parte de la ecuación: 3 (x + 3).

Hace 3 años tenía x − 3 y tres veces esta edad es: 3 (x − 3).

Restando ambos miembros dará x, la edad. Veamos:

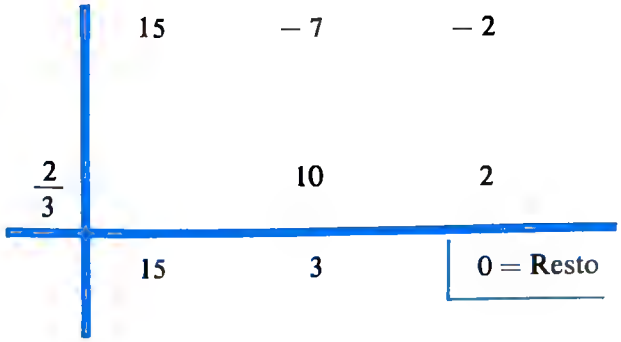
$$3(x+3)-3(x-3)=x$$

$$3x+9-3x+9=x$$

$$3x-3x+18=x \qquad \boxed{x=18}$$

Vamos a comprobar: dentro de 3 años tendrá 21; hace tres años tenía 15. Tomando 3 veces ambas adades y restándolas tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}3\times 21=63\\3\times 15=45\end{array}\right\}\ 63-45=18$$



Cociente $= 15x + 3$

Como hemos multiplicado el divisor $3x - 2$ por $\frac{1}{3}$ y hemos dividido por $x - \frac{2}{3}$ el cociente obtenido está multiplicado por el inverso de $\frac{1}{3}$, es decir, 3, luego si el cociente obtenido está multiplicado por 3, el cociente auténtico lo obtenemos multiplicando por $\frac{1}{3}$ el obtenido.

Divisor empleado: $x-\frac{2}{3}$

Divisor auténtico: $3\left(x-\frac{2}{3}\right)=3x-2$

Cociente obtenido: $15x + 3$

Cociente auténtico: $\frac{1}{3}(15x+3)=\frac{15}{3}x+1$

NOTA.—El uso de este apartado b) está indicado para cualquier caso en que la división sea exacta o no sea exacta, ya que los restos son siempre idénticos e independientes de las maniobras que hagamos con el divisor.

c) Si multiplicamos el dividendo P (x) de una división por un número K, la única alteración que se produce es que el resto resulta multiplicado también por la constante K.

$$\begin{array}{l|l}P(x) & Q(x)\\ \underline{R(x)} & C(x)\end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l|l}K\cdot P(x) & Q(x)\\ \underline{K\cdot R(x)} & C(x)\end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l|l}\frac{1}{K}\,P(x) & Q(x)\\ \underline{\frac{1}{K}\,R(x)} & C(x)\end{array}$$

6.–MAXIMO COMUN DIVISOR DE VARIOS POLINOMIOS

El concepto sigue los mismos criterios que en la divisibilidad numérica.

Se entiende por M.C.D. de varios polinomios al polinomio de mayor grado que es divisor común de todos los propuestos.

El cálculo de su M.C.D. lo podemos hacer por dos procedimientos existentes y mencionados en la divisibilidad numérica:

– En el caso de que los polinomios admitan descomposición en factores primos. Elegimos los factores comunes a todos los monomios y afectados con el menor exponente, ya que los monomios estarán prácticamente descompuestos en factores primos.

– En el caso de que los polinomios no admitan descomposición en factores primos. Utilizaremos el Algoritmo de Euclides, dividiendo el polinomio de mayor grado entre otro de menor grado.

Si la primera división no es exacta, seguimos dividiendo sucesivamente el último divisor empleado entre el último resto obtenido hasta que una de las divisiones sea exacta.

Cuando una de las divisiones sea exacta, este último divisor empleado es el M.C.D. de los dos monomios o polinomios.

Si hubiese más de dos monomios o polinomios, hallamos el M.C.D. de dos de ellos y éste con otro monomio o polinomio no utilizado, hasta que no quede ninguno sin usar.

El último M.C.D. obtenido es el M.C.D. de todos los monomios o polinomios propuestos.

NOTA.–Cuando el último divisor empleado que haga la división exacta sea un número, podemos decidir que los polinomios en cuestión son **primos entre sí**. En la divisibilidad numérica, dos números son primos entre sí cuando únicamente admiten como divisor común la unidad. En la divisibilidad de polinomios, dos polinomios son primos entre sí cuando únicamente admiten, como divisor común, un polinomio de grado cero, es decir, un número, y lo expondremos también como 1).

A.–M.C.D. de monomios.

Utilizaremos el procedimiento de cálculo ordinario, localizando factores comunes con el menor exponente; en el caso de que los coeficientes de los monomios no sean enteros, el coeficiente de su M.C.D. debe ser 1.

Ej.: Hallar el M.C.D. de los monomios:

$$6a^3b,\ 3a^2bc,\ 14a^4b^2c^2$$

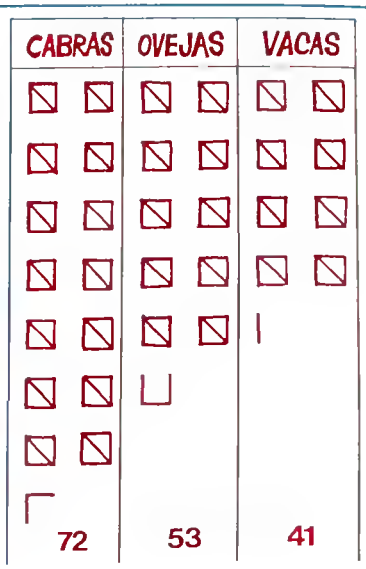
Aplicaremos el primer procedimiento que es el más adecuado para estos casos.

$$6a^3b = 2 \cdot 3 \cdot a^3b$$

$$3a^2bc = 3a^2bc$$

$$14a^4b^2c^2 = 2 \cdot 7 \cdot a^4b^2c^2$$

$$\text{M.C.D.}\ (6a^3b,\ 3a^2bc,\ 14a^4b^2c^2) = a^2b$$



En la antigua Roma tenían una forma muy "sui generis" de contabilizar el ganado y sus crías. Con objeto de no contar varias veces las reses, hacían un cuadro estadístico.

Por un animal, ponían una raya horizontal; a otro de la misma clase otra horizontal, después al tercero y al cuarto líneas verticales y al quinto una diagonal.

De esta forma cada cuadrado con su diagonal valía cinco.

Se sumaban los cuadrados y sus partes y le daba el número total.

El mismo procedimiento usaba el agricultor para contar los árboles frutales; y hoy día puede utilizarse este método para contar piezas o artículos que estén mezclados.

Ej.: Hallar el M.C.D. de las siguientes expresiones:

$$(x + y)^3 (x + 1),\ 3 (x + y)^2 (x + 1)^2,\ (x + y)^4 (x + 1)^3 (x - 1)$$

$$\text{M.C.D.} = (x + y)^2 (x + 1)$$

Ej.: Hallar el M.C.D. de los monomios:

$$3a^2bc, \frac{7}{4} ab \text{ y } 9ab^2$$

$$\text{M.C.D.} = ab$$

B.—M.C.D. de polinomios

Es obvio que descomponer un polinomio en factores primos puede ser un asunto bastante complejo.

Así que para hallar el M.C.D. de varios polinomios utilizaremos decididamente el procedimiento del Algoritmo de Euclides, ya expuesto en el apartado anterior, teniendo en cuenta que se suele exponer el M.C.D. con el coeficiente del término de mayor grado igual a la unidad.

Ej.: Hallar el M.C.D. de los polinomios:

$$x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{y} \quad x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 2$$

Comenzaremos el algoritmo de Euclides, dividiendo siempre el de mayor grado entre el de menor grado.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 2 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^4 - x^3 - x^2 - x} & x \\ x^2 + 3x + 2 & \end{array}$$

RUMORES

Un lector de "Matemáticas para todos" le comunica a tres amigos la existencia de esta obra. Esos tres amigos se lo dice cada uno a otros tres. Cada uno de estos nueve a otros tres y así sucesivamente (hacemos el problema con la condición de que cada persona se lo diga solamente a tres personas).

Cade comunicación o noticia la van diciendo a cada minuto, o sea, la primera noticia en el primer minuto; la segunda en el segundo minuto; la tercera en el tercer minuto, etc.

Suponiendo que todo el bloque de población esté ubicado en un mismo sitio, o sea, que no se tuviera nadie que desplazar a otra población. Se pregunta: ¿Cuánto tiempo tardará en saberlo toda España? SOLUCIÓN: 15 minutos.

$$1 + 2^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}$$

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 + 19683 + 50049$$

$$3^{11} + 3^{12} + 3^{13} + 3^{14} + 3^{15} + 3^{16}$$

$$177.147 + 531.441 + 1.594.323 + 4.782.969 + 14.348.907 + 43.046.721$$

Como la primera división no ha sido exacta, seguimos dividiendo el último divisor empleado entre el último resto obtenido.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 + 3x + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - 3x^2 - 2x & x - 2 \\ \cline{1-1} -2x^2 - x + 1 & \\ 2x^2 + 6x + 4 & \\ \cline{1-1} 5x + 5 & \end{array}$$

Tampoco es exacta. Repetimos la operación sucesivamente.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 2 & 5x + 5 \\ \cline{2-2} -x^2 - x & \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \\ \cline{1-1} 2x + 2 & \\ -2x - 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Conseguida una división exacta, el último divisor empleado es el M.C.D. de los polinomios propuestos, en este caso, $5x + 5$.

Ahora bien, sabemos que podemos multiplicar el divisor de una división por cualquier número, no resultado afectado el resto, y por norma se suele expresar el M.C.D. como el más elemental; así que si multiplicamos $5x + 5$ por $1/5$ obtenemos $x + 1$.

$$\text{M.C.D.} = x + 1$$

Ej.: Hallar el M.C.D. de los polinomios:

$$x^3 - x^2 + x - 1 \quad ; \quad x^4 - 1 \quad \text{y} \quad x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Elegimos por ejemplo los dos primeros polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} -x^4 + x^3 - x^2 + x & x + 1 \\ \cline{1-1} x^3 - x^2 + x - 1 & \\ -x^3 + x^2 - x + 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Luego el M.C.D. de los dos primeros polinomios empleados es: $x^3 - x^2 + x - 1$.

Ahora utilizamos éste y otro polinomio no empleado:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} -x^4 + x^3 - x^2 + x & x + 3 \\ \cline{1-1} 3x^3 + x^2 + 3x + 1 & \\ -3x^3 + 3x^2 - 3x + 3 & \\ \cline{1-1} 4x^2 + 4 & \end{array}$$

Tomas Bartam fue el primer naturalista nacido en América, y Linneo lo llamó el más ilustre botánico nacido en el Nuevo Mundo. Empezó su afición en sus primeros años, y su vida en la naturaleza fue avivando su curiosidad haciéndole coleccionar ejemplares curiosos de la botánica. Se convirtió en explorador y proveía de curiosidades y minerales a los museos y aficionados de su época.

Conservó en el misterio, y nunca reveló en vida, su descubrimiento más productivo: un inmenso y fértil valle, el conocido hoy día con el nombre de Shenandoah, sin explorar hasta entonces, lleno de maravillosas flores y de arbustos y árboles rarísimos, nunca vueltos a encontrar en estado silvestre.

Como no ha salido exacta la división, seguimos dividiendo el último divisor empleado entre el último resto obtenido:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 1 & 4x^2 + 4 \\ \hline -x^3 \quad - x & \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ \hline -x^2 \quad - 1 & \\ x^2 \quad + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Así que el M.C.D. de los tres polinomios es $4x^2 + 4$, es decir, que el más elemental es $\frac{1}{4}(4x^2 + 4) = x^2 + 1$

$$\text{M.C.D.} = x^2 + 1$$

7.—MINIMO COMUN MULTIPLO DE VARIOS POLINOMIOS

El concepto sigue criterios paralelos a los expuestos en la divisibilidad numérica.

Se entiende por M.C.M. de varios polinomios el polinomio de menor grado que es múltiplo o dividendo común de todos los propuestos.

El cálculo del M.C.M. lo podremos hacer por los dos procedimientos existentes y mencionados en la divisibilidad numérica.

— En el caso de que los polinomios estén descompuestos o admitan descomposición en factores primos, elegimos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

— En el caso de que los polinomios no admitan descomposición en factores primos, es conveniente aplicar la relación fundamental del M.C.D. = D y el M.C.M. = M, que dice:

$$P(x) \cdot Q(x) = D \cdot M \Rightarrow M = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{D}$$

o también sabemos que al dividir dos polinomios entre su M.C.D. (lo mismo que en la divisibilidad numérica) los resultados obtenidos dividimos entre

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P(x)}{D} = C \\ \frac{Q(x)}{D} = C' \end{array}\right\} M = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{D} = \frac{P(x)}{D} \cdot \frac{Q(x)}{D} \cdot D = C \cdot C' \cdot D$$

A.—M.C.M. de monomios.

Elegimos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

En el caso de que los coeficientes de los monomios no sean todos enteros, elegimos como coeficientes de M.C.M. a la unidad.

Tenemos que tener mucho cuidado con los enunciados de los problemas.

Algunas veces podemos encontrarnos con un profesor algo bromista, que al enunciarnos un problema ponga en el mismo una "pega".

Por ejemplo: Si yo hago el enunciado de uno de ellos diciendo: diez por una diez, más tres, son catorce.

Fijaros bien en las "comas".

El problema que vosotros pensáis es diez por una, son diez, más tres son trece, ¿no? Yo no digo esto: yo digo diez por una diez (10 x 1,10) que son 11 más tres ¿serán catorce? Entendido.

Otro problema de lo mismo.

Café puro y copa, a duro la pieza. ¿Cuánto es?

SOLUCION: Cuidado, cuidado, no son tres duros; son dos duros. Yo digo café puro (sin mezcla) y copa ¿estamos?

Este es un problema de precisión... al poner la coma (en este caso no poner) otra cosa sería decir: café, puro, y copa, etc.

Ej.: Hallar el M.C.M. de los monomios:

$$7a^2bc,\ 2abc^3 \text{ y } 4ab$$

$$\text{M.C.M.} = 7 \cdot 4a^2bc^3 = 28a^2bc^3$$

Ej.: Hallar el M.C.M. de los polinomios:

$$(x+y)^2(a+b),\ (x+y)(a+b)^2(a-b) \text{ y } 3(x+y)(a+b)(a-b)$$

$$\text{M.C.M.} = 3(x+y)^2(a+b)^2(a-b)$$

Ej.: Hallar el M.C.M. de los monomios:

$$\frac{3}{5}xy,\ 2a^2xy,\ -4axy^2$$

$$\text{M.C.M.} = a^2xy^2$$

B.—M.C.M. de polinomios

Como descomponer un polinomio en factores primos suele ser a veces una labor compleja, para estos casos utilizaremos lo expuesto anteriormente, aplicando indistintamente cualquiera de las expresiones:

$$M = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{D} \quad \text{ó} \quad M = C \cdot C' \cdot D$$

y teniendo en cuenta que suele exponer el M.C.M. con el coeficiente del término de mayor igual a la unidad.

Ej.: Hallar el M.C.M. de los polinomios:

$$x^2 - 2x - 3 \quad \text{y} \quad x^3 - x$$

Obsérvese que es necesario antes de obtener su M.C.D., que realizaremos por el algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x & x^2 - 2x - 3 \\ \hline -x^3 + 2x^2 + 3x & x + 2 \\ \hline 2x^2 + 2x & \\ -2x^2 + 4x + 6 & \\ \hline 6x + 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2 - 2x - 3 & 6x + 6 \\ \hline -x^2 - x & \frac{1}{6}x - \frac{3}{6} \\ \hline -3x - 3 & \\ 3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Su M.C.D. es: $6x + 6 = \frac{1}{6}(6x + 6) = x + 1$

$D = \text{M.C.D.}(x^2 - 2x - 3,\ x^3 - x) = x + 1$

Para hallar su M.C.M. aplicamos cualquiera de las expresiones ofrecidas, por ejemplo $M = C \cdot C' \cdot D$.

PROBLEMAS DE CANIBALES

Un explorador cayó en manos de una tribu de caníbales.

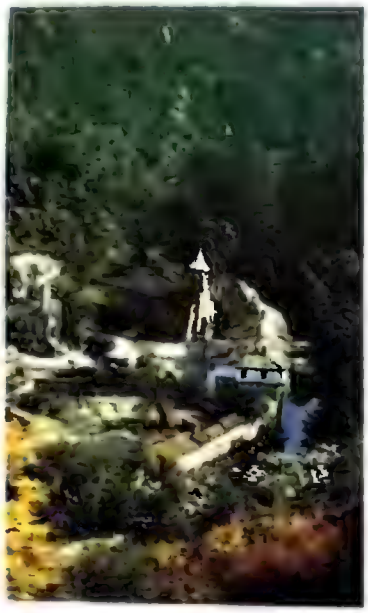
Al jefe de la tribu le gustaba dar siempre una oportunidad a sus prisioneros.

Le dijo al explorador.

Al final de ese camino te encontrarás con dos guerreros míos; uno contesta siempre la verdad y el otro siempre mentira. Allí encontrarás dos caminos, uno de ellos te conduce a tu salvación y el otro te conduce nuevamente aquí, que será tu muerte. Sólo puedes hacer una pregunta a uno solo de ellos.

¿Qué haría para tomar el camino de su salvación?

La solución en Pag. 272.



Los monasterios en toda Europa fueron fortalezas inconquistables y centros de cultura. Dentro de sus gruesas paredes se escribieron muchas obras literarias y se conservaron las muestras artísticas de la antigüedad.

Fundado en el siglo X el monasterio de Rila, situado en lo que es hoy Bulgaria, se erigió sobre la ermita habitada por un anacoreta; está situado a 1.150 metros de altitud en el macizo de Rila, de donde toma su nombre.

El museo del monasterio posee una apreciable colección de manuscritos, iconos y muebles de madera del siglo XIV.

Pero, sin duda, la pieza maestra más sobresaliente por su originalidad y mérito es un crucifijo esculpido en madera realizado por el monje Rafail. Impresionante trabajo de habilidad y paciencia, constancia y perfección, con tallas microscópicas, representando ciento cuarenta escenas bíblicas, y mil quinientos personajes, el mayor del tamaño de un grano de arroz. Según se sabe, tardó doce años en terminarlo y al final de tan colosal tarea, el desgraciado artesano quedó completamente ciego.

También cuenta el monasterio de la Rila con una biblioteca de veinte mil volúmenes, valiosos manuscritos y documentos rarísimos.

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x-3 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x-3 \\ \hline -3x-3 & \\ 3x+3 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad C=\frac{x^2-2x-3}{x+1}=x-3$$

$$\begin{array}{r|l} x^3\quad -x & x+1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2-x \\ \hline -x^2-x & \\ +x^2+x & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad C'=\frac{x^3-x}{x+1}=x^2-x$$

$$M=C\cdot C'\cdot D=(x-3)(x^2-x)(x+1)=x^4-3x^3-x^2+3x$$

8.–TEOREMA DEL RESTO

El resto obtenido de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x-a$, es el mismo que si sustituimos en el polinomio dividendo x por a.

Si dividimos un polinomio cualquiera $P(x)$ entre un binomio de la forma $x-a$:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline R & C(x) \end{array} \Rightarrow P(x)=(x-a)\cdot C(x)+R$$

y a continuación, en la prueba de la división sustituimos x para.

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+R \Rightarrow P(a)=$$
$$=\underbrace{(a-a)}_{0}\cdot C(a)+R \Rightarrow P(a)=R$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{0}$$

Ej.: Hallar el resto del polinomio $P(x)=x^5+3x^2+2x-5$ al dividirlo por $x-3$.

Sustituiremos en el polinomio x por 3:

$$R=P(3)=3^5+3\cdot 3^2+2\cdot 3-5=243+27+6-5=271$$

Ej.: Hallar el resto del polinomio $P(x)=x^3+x-1$ al dividirlo por $x+2$.

Sustituiremos en el polinomio x por -2.

$$R=P(-2)=(-2)^3+(-2)-1=-8-2-1=-11$$

9.–TEOREMA DEL FACTOR

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea divisible (división exacta) por un binomio de la forma $x-a$, es que el polinomio se anule (resto cero, según teorema del resto) al sustituir x por a.

Ej.: Comprobar si el polinomio $3x^3 - 2x^2 + x - 2$ es divisible por el binomio $x - 1$:

$$R = P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 3 - 2 + 1 - 2 = 0$$

Como el polinomio se anula, es decir el resto es cero, el polinomio es divisible por $x - 1$.

10.–DIVISION DE $x^n \pm a^n$ ENTRE $x \pm a$

Vamos a estudiar este tipo particular de divisiones, que en Matemáticas poseen una cierta trascendencia.

A.–División de $x^n + a^n$ entre $x + a$.

Este tipo de división es exacta siempre que el exponente n sea impar. Para ello utilizaremos como elemento determinante el teorema del factor.

$$P(x) = x^n + a^n \Rightarrow R = P(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0$$

NOTA.–Obsérvese que $(-a)^n$ al ser n impar, el resultado es negativo, de la forma $-a^n$.

B.–División de $x^n + a^n$ entre $x - a$.

Este tipo de división no es exacta, para cualquier valor que tenga a.

$$P(x) = x^n + a^n \Rightarrow R = P(a) = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$$

NOTA.–Obsérvese en a^n que cualquier valor de a positivo, elevado a exponente par o impar, es siempre positivo.

C.–División de $x^n - a^n$ entre $x + a$.

Este tipo de división es exacta siempre que el exponente n sea par.

$$P(x) = x^n - a^n \Rightarrow R = P(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = 0$$

NOTA.–Obsérvese que cualquier número positivo o negativo elevado a exponente par es siempre positivo: $(-a)^n = a^n$.

D.–División de $x^n - a^n$ entre $x - a$.

Este tipo de división es siempre exacta para cualquier valor de n.

$$P(x) = x^n - a^n \Rightarrow P(a) = a^n - a^n = 0$$

NOTA.–Obsérvese que cualquier número positivo elevado a exponente par o impar es siempre positivo: $a^n = a^n$.

Los sellos de Correos, afición corrientísima hoy día y que proporciona grandes satisfacciones a miles de personas, tienen muchos datos curiosos. Así el sello más antiguo se puso a la venta el 1 de mayo de 1840 y valía 1 penique; fue en Inglaterra en la época de la Reina Victoria.

Existen ejemplares rarísimos y que alcanzan grandes precios.

Uno de ellos es el del Correo Aéreo de Estados Unidos, de 24 centavos, del año 1918, en el que se imprimió el biplano invertido, dando la sensación de un concurso acrobático más que de un vuelo normal de transporte. Cuatro ejemplares unidos en bloque se subastaron en 1979, alcanzando un precio de medio millón de dólares. De todas formas, el precio más grande lo alcanzó en 1980 un sello de un céntimo, magenta, de la Guinea Británica, matasellado el día 4 de Abril de 1856, por el que se pagaron 400.000 libras esterlinas.

El sello de más valor nominal editado es uno por valor de 100 libras, del año 1925, de Kenia, con la efigie del Rey Jorge V, en colores rojo y negro.

Sabemos, en el ajedrez, que el mínimo de saltos que debe de realizar un peón para coronar dama son cinco.

¿Pero sabemos, por ejemplo, el número total de jugadas posibles que existen?

$$(10^{10})^{50}$$

Diez elevado a la décima potencia y ésta a su vez elevada a la cincuenteava potencia.

¿Cómo puede saber KARPOV unas cuántas?

11.–FACTOR COMUN DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA

Obtener el factor común de una expresión algebraica significa transformar en producto dicha expresión y se consigue observando lo que tienen en común todos los términos de un polinomio. Dicha parte común a todos ellos es el factor común del polinomio.

La comprobación de si una operación de factor común está bien realizada es multiplicando los factores resultantes para obtener la expresión inicial.

Ej.: Transformar en producto la expresión $Px^2 - 3x^2 + x$:

$$Px^2 - 3x^2 + x = x \cdot (Px - 3x + 1)$$

Ej.: Obtener el factor común de la expresión $3x^4y^2 - 4x^3yz + 2x^3$:

$$3x^4y^2 - 4x^3yz + 2x^3 = x^3\,(2xy^2 - 4yz + 2)$$

Ej.: Obtener el factor común de la expresión $(x + y)^2\,(x - y) - 3\,(x + y)\,(x - y)^3$:

$$(x + y)^2\,(x - y) - 3\,(x + y)\,(x - y)^3 =$$
$$= (x + y)\,(x - y)\,[(x + y) - 3\,(x - y)^2]$$

12.–DESARROLLOS POLINOMICOS NOTABLES

Dada la utilidad y la frecuencia con la que en problemas matemáticos surgen las expresiones que vamos a detallar, y la conveniencia de retenerlas en la memoria para posteriores usos, es por lo que se hace necesario este apartado, aunque sus desarrollos se pueden practicar efectuando una simple multiplicación de polinomios.

A.–Cuadrado de una suma polinomica.

El resultado o desarrollo del cuadrado de una suma equivale al cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término más el doble del primer término por el segundo término:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Ej.: Desarrollar: $(x + 3y)^2$:

$$(x + 3y)^2 = x^2 + (3y)^2 + 2 \cdot x \cdot 3y = x^2 + 9y^2 + 6xy$$

Ej.: Desarrollar: $\left(2a + \frac{b}{5}\right)^2$

$$\left(2a + \frac{b}{5}\right)^2 = (2a)^2 + \left(\frac{b}{5}\right)^2 + 2 \cdot 2a \cdot \frac{b}{5} = 4a^2 + \frac{b^2}{25} + \frac{4}{5}ab$$

Ej.: Desarrollar: $(3x + 5y)^2$

Obsérvese que también podemos obtener el resultado efectuando una multiplicación ordinaria de polinomios. Veamos cómo se haría por los dos métodos.

– Multiplicando polinómicamente:

$$\begin{array}{r} 3x + 5y \\ 3x + 5y \\ \hline 9x^2 + 15xy \\ \quad 15xy + 25y^2 \\ \hline 9x^2 + 30xy + 25y^2 \end{array}$$

– Aplicando la fórmula del desarrollo:

$$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + (5y)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y = 9x^2 + 25y^2 + 30xy$$

B.–Cuadrado de una diferencia polinomica.

El desarrollo del cuadrado de una diferencia equivale al cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término menos el doble del primer término por el segundo término.

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Ej.: Desarrollar: $(2x - 5)^2$

$$(2x - 5)^2 = (2x)^2 + 5^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 = 4x^2 + 25 - 20x$$

Ej.: Desarrollar: $(x + y - z)^2$

En el caso de que el polinomio a desarrollar tenga más términos de los que correspondan a un binomio, como es este caso, para poder aplicar la fórmula tendremos que considerar dos de ellos como si fueran un término. Obsérvese cómo inicialmente consideramos a $x + y$ como si fuese un término.

$$(x + y - z)^2 = [(x + y) - z]^2 = (x + y)^2 + z^2 - 2(x + y)z =$$
$$= x^2 + y^2 + 2xy + z^2 - 2xz - 2yz$$

C.–Diferencia de cuadrados.

Una diferencia de cuadrados equivale a una suma por una diferencia. Véase en la expresión típica

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Téngase en cuenta futuras aplicaciones, que el transformar una diferencia de cuadrados en suma por diferencia es una forma de transformar una diferencia (aunque muy particular) en un producto.

Además hay que hacer notar la confusión que pudeira existir entre el cuadrado de una diferencia $(a - b)^2$ y una diferencia de cuadrados $a^2 - b^2$ que son dos expresiones totalmente distintas.

PROBLEMA DE SITUACION

El director de protocolo de un gran hotel, recibió cierto día el encargo de preparar un banquete. El cliente le indicó que necesariamente tenía que distribuir a las 32 personas invitadas en 8 filas, de tal manera que en todas y cada una de las filas, estén situadas 5 personas.

NOTA: Este problema no es de broma como aparentemente podemos imaginar. Está dedicado especialmente a los geómetras.

La solución en Pag. 272.

De origen burgués, Diógenes pregonaba una nueva forma de vivir. Su filosofía se basaba en una renuncia de toda conveniencia social, oponiendo a ella la Naturaleza. El hombre debe liberarse de sus deseos y reducir todo lo posible sus necesidades. El mismo caminaba descalzo, tenía una sola túnica, y habitaba en un tonel. Ha pasado a la historia el hecho de que en pleno día, y con una linterna encendida, buscara un hombre por las calles de Atenas.

Rechazó siempre las matemáticas y la astronomía, considerándolas como inservibles y dañinas, hasta tal punto, que se burlaba de los astrónomos, diciéndoles que se preocupaban del sol y de las estrellas sin importarles "Todo cuanto tienen en sus pies".

Su vida fue dedicada a la filosofía donde llegó a alcanzar las cotas más altas y la consideración posterior a sus estudios.

Murió pobre a la edad de 90 años, devorado por los perros. No se conservan sus escritos.

También hay que advertir que la diferencia de cuadrados muchas veces exige una preparación previa a la transformación.

Ej.: Transformar en producto: $x^2 - y^2$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Ej.: Transformar: $x^2 - 4y^2$

$$x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x + 2y)(x - 2y)$$

Ej.: Transformar: $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$$

Ej.: Transformar en producto: $x^4 - 16$

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x^2 - 2^2) =$$
$$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

Ej.: Transformar: $a^2 - 3b^2$

$$a^2 - 3b^2 = a^2 - (\sqrt{3}\,b)^2 = (a + \sqrt{3}\,b)(a - \sqrt{3}\,b)$$

Ej.: Transformar a diferencia de cuadrados: $(x + 3y)(x - 3y)$

$$(x + 3y)(x - 3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$$

D.—Cubo de una suma polinómica.

El desarrollo del cubo de una suma equivale al cubo del primer término más el cubo del segundo término más el triple del cuadrado del primer término por el segundo término más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término.

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

Ej.: Desarrollar: $(x + 2y)^3$

$$(x + 2y)^3 = x^3 + (2y)^3 + 3x^2 \cdot 2y + 3x\,(2y)^2 =$$
$$= x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$$

E.—Cubo de una diferencia polinómica.

El desarrollo del cubo de una diferencia equivale al cubo del primer término menos el cubo del segundo término menos el triple del cuadrado del primer término por el segundo más el triple del primer término por el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

Ej.: Desarrollar: $\left(\frac{x}{3}-2\right)^3$

$$\left(\frac{x}{3}-2\right)^3=\left(\frac{x}{3}\right)^3-2^3-3\left(\frac{x}{3}\right)^2\cdot 2+3\frac{x}{3}\cdot 2^2=$$

$$=\frac{x^3}{27}-8-3\cdot\frac{x^2}{9}\cdot 2+3\frac{x}{3}\cdot 4=\frac{1}{27}x^3-8-\frac{2}{3}x^2+4x$$

13.–SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En general, para simplificar una expresión cualquiera, no existen métodos, sino que el conocimiento de los elementos del cálculo combinados con una cierta práctica y agilidad de ellos son los que nos van a permitir llegar a condiciones de simplificación.

De forma anecdótica diremos que el problema de la simplificación se traduzca en algo "exquisito".

No obstante, como algo que sirva de pauta, hay que indicar que las operaciones que nos permiten transformar sumas o diferencias en productos pueden llegar a ser un buen objetivo, sin entenderlo como criterio general. También hemos de indicar que una simplificación está motivada generalmente cuando existe un cociente de polinomios, es decir, que existe una fracción (expresión algebraica racional fraccionaria, comúnmente llamada fracción racional). Pues bien, sabemos que cuando esta fracción se pueda simplificar, hacer irreducible o hallar su representante conónico, un método es dividir su numerador y denominador por el M.C.D. de ambos, obteniendo otra fracción equivalente más sencilla y simplificada. Lo que ocurre es que hallar el M.C.D. de dos polinomios, sobre todo si son complejos, ya hemos visto que es laborioso y muchas veces se prefieren métodos más "visuales" pero no menos ortodoxos.

Ej.: Simplificar la expresión: $\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$

Vamos a simplificar esta expresión utilizando el M.C.D.

Hallar el M.C.D. del numerador y denominador por el algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-3 & x^2-3x+2 \\ -x^2+3x-2 & 1 \\ \hline 5x-5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2-3x+2 & 5x-5 \\ -x^2+x & \frac{1}{5}x-\frac{2}{5} \\ \hline -2x+2 & \\ 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego el M.C.D. es $5x-5$, es decir, $\frac{1}{5}(5x-5)=x-1$

M.C.D.: $(x^2+2x-3,\ x^2-3x+2)=x-1$

Un número grande, por grande que sea, siempre será definido y finito. Por ejemplo, en la poesía el finito termina alrededor del número 3.000; cualquier número mayor que éste es (en poesía) infinito. El poeta, incluso, hablará de un número infinito de estrellas cuando en una noche clara no podrá ver más que 2.000. Sin embargo, para el astrônomo, un número muchísimo más alto de estrellas siempre es finito. Es infinito el número de gotas que caen de la lluvia sobre una ciudad, pero ¿es infinito?; no, de ninguna manera, el número es finito. ¿Un número grande? Puede ser un millón elevado a la millonésima parte, aún más... Siempre existen números más altos.

Un descubrimiento importante en el perfeccionamiento de las armas de fuego fue sin duda el estriado del interior del ánima o cañón; en lugar de ser liso se talla a todo lo largo de él una estriadura que imprime un movimiento rotatorio al proyectil, para aumentar la precisión en el tiro, en base a una trayectoria estabilizada.

Los proyectiles de las armas modernas superan velocidades de 1.000 m por segundo. La enorme presión que se desarrolla en el interior del casquillo en el momento de la ignición es equivalente a la que mantiene la caldera a plena carga de una gran locomotora a vapor; mientras el proyectil es impulsado dentro del cañón, aumenta progresivamente su velocidad. Pero en el momento en que sale por la boca cesa súbitamente el empuje, continuando su vuelo debido al efecto de la energía adquirida. Al momento actúan sobre él dos fuerzas: la de la gravedad y la resistencia del aire. Con todos estos efectos se puede uno dar cuenta de los grandes cálculos matemáticos que se requieren para el desarrollo de armas y proyectiles.

Dividimos el numerador y el denominador por el M.C.D. y obtendremos la simplificación:

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-3 & x-1 \\ -x^2+x & \hline & x+3 \\ \hline 3x-3 & \\ -3x+3 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2-3x+2 & x-1 \\ -x^2+x & \hline & x-2 \\ \hline -2x+2 & \\ 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Definitivamente:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\frac{\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}}{\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}}=\frac{x+3}{x-2}$$

NOTA.—Si el M.C.D. hubiese sido 1, los polinomios serían primos entre sí, y la expresión no admitiría simplificación.

Ej.: Simplificar la expresión: $\dfrac{4x^2a}{12xya^2}$

$$\frac{4x^2a}{12xya^2}=\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{a}}{3\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{x}y\cdot\cancel{a}\cdot a}=\frac{x}{3ya}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{bx+by}{mb+nb}$

$$\frac{bx+by}{mb+nb}=\frac{b\,(x+y)}{b\,(m+n)}=\frac{x+y}{m+n}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{a+b}{a^2+ab}$

$$\frac{a+b}{a^2+ab}=\frac{a+b}{a\,(a+b)}=\frac{1}{a}$$

Ej.: Hallar el representante canónico de la expresión: $\dfrac{9\,(a^2b)^3}{27a^{10}b}$

$$\frac{9\,(a^2b)^3}{27a^{10}b}=\frac{9a^6b^3}{27a^{10}b}=\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{a^6}\cdot\cancel{b}\cdot b^2}{3\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{a^6}\cdot a^4\cdot\cancel{b}}=\frac{b^2}{3a^4}$$

Ej.: Hacer irreducible la expresión: $\dfrac{xy^2-x^2}{x^2-ax}$

$$\frac{xy^2-x^2}{x^2-ax}=\frac{x\,(y^2-x)}{x\,(x-a)}=\frac{y^2-x}{x-a}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)\,(a-b)}=\frac{(a-b)\,(a-b)}{(a+b)\,(a-b)}=\frac{a-b}{a+b}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{3bx - 3by}{9y^2 - 9x^2}$

$$\frac{3bx - 3by}{9y^2 - 9x^2} = \frac{3b(x-y)}{9(y^2 - x^2)} = \frac{-3b(x-y)}{9(x^2 - y^2)} = \frac{-3b(x-y)}{9(x+y)(x-y)} = \frac{-b}{3(x+y)}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{x^5 - 32}{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16}$

Dividiremos el numerador y el denominador por el M.C.D. de ambos.

Vamos, pues, a localizar el M.C.D. por el Algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 32 & x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 \\ \hline -x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x & x - 2 \\ \hline -2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32 & \\ 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego el M.C.D. de ambos polinomios es el último divisor empleado que hace la división exacta. En este caso es:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

$$\frac{x^5 - 32}{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16} = x - 2$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{a^2 - b^2 - ac + bc}{b^2 - c^2 + ac + ab}$

$$\frac{a^2 - b^2 - ac + bc}{b^2 - c^2 + ac + ab} = \frac{a^2 - b^2 - c(a-b)}{b^2 - c^2 + a(c+b)} = \frac{(a+b)(a-b) - c(a-b)}{(b+c)(b-c) + a(b+c)} =$$

$$= \frac{(a-b)[(a+b) - c]}{(b+c)[(b-c) + a]} = \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b+c)(a+b-c)} = \frac{a-b}{b+c}$$

Ej.: Simplificar la expresión: $\dfrac{a^3 - b^3}{xa - yb + ya - yb}$

$$\frac{a^3 - b^3}{xa - xb + ya - yb} = \frac{a^3 - b^3}{x(a-b) + y(a-b)} = \frac{a^3 - b^3}{(a-b)(x+y)}$$

Dividimos aparte $a^3 - b^3$ entre $a - b$ manteniendo como letra ordenatriz o variable: a

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 0 & 0 & -b^3 \\ b & & b & b^2 & b^3 \\ \hline & 1 & b & b^2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \hline 0 & a^2 + ab + ab^2 \end{array}$$

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)(x+y)} = \frac{a^2 + ab + ab^2}{x + y}$$

La velocidad de los proyectiles se mide en la actualidad con precisos cronómetros digitales, conectados a mecanismos electrónicos. Tal como queda dicho, la bala empieza a perder velocidad inmediatamente después de salir de la boca, y, a medida que se aleja del arma, la velocidad representa una ventaja en la trayectoria parabólica; cuanto más rápidamente un proyectil cubra la distancia que lo separa del blanco tanto menor será su caida. Esta velocidad puede graduarse alargando o acortando el cañón. En líneas generales, y en igualdad de condiciones, una diferencia de 2,5 cm puede hacer que aumente o disminuya la velocidad entre 1,5 y 7,5 metros por segundo. A veces se acepta la pérdida de velocidad para fabricar armas más cortas y manejables.

La energía en kilográmetros es directamente proporcional a la masa; de esta energía depende su poder penetrante.

En la época de escasez de tabaco en España, los que la hemos vivido sabíamos que se aprovechaba al máximo, hasta tal punto, que de las colillas de los cigarrillos se hacían cigarrillos nuevos. He aquí dos problemas curiosos de esta circunstancia que deseamos no se repita.

Primer problema

Tenemos 9 colillas de cigarrillos. De cada tres colillas sale un cigarrillo nuevo. ¿Cuántos cigarrillos nos fumaremos?

SOLUCION

No son tres cigarrillos, porque con esas nueve colillas haremos tres cigarrillos nuevos, pero de esos tres cigarrillos salen otras tres colillas que forman otro cigarrillo. O sea nos fumaremos **cuatro** cigarrillos.

Segundo problema

Este se debe al ingenio del gran escritor Fernández Flórez y consiste en fumar tres cigarrillos con seis colillas en las mismas condiciones que el anterior.

Con tres colillas, de las seis, nos fumaremos un cigarrillo que nos dé una nueva colilla, la cual sumada a las otras tres da cuatro; tomamos tres y hacemos otro cigarrillo que nos da otra colilla que sumada a la que nos sobraba hacen un total de **dos**. Le pedimos a un amigo que nos preste una colilla; con dos enteriores y esta nueva hacen tres, o sea, otro cigarrillo. Nos lo fumamos y la colilla que nos queda se la damos al amigo ... ya que se la deblamos.

Ej.: Hacer irreducible la expresión: $\dfrac{14a^2 - 7ax}{10ay - 5xy}$

$$\frac{14a^2 - 7ax}{10ay - 5xy} = \frac{7a\,(2a - x)}{5y\,(2a - x)} = \frac{7a}{5y}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{x^{2n} - x^n}{x^{n+1}}$

$$\frac{x^{2n} - x^n}{x^{n+1}} = \frac{x^n \cdot x^n - x^n}{x^n \cdot x} = \frac{x^n\,(x^n - 1)}{x^n \cdot x} = \frac{x^n - 1}{x}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{a^2 - (b + c)^2}{a - b - c}$

$$\frac{a^2 - (b + c)^2}{a - b - c} = \frac{[a + (b + c)]\,[a - (b + c)]}{a - b - c} =$$

$$= \frac{(a + b + c)\,(a - b - c)}{a - b - c} = a + b + c$$

Ej.: Reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{z}{xy}$$

La forma de conseguirlo es igual que en las fracciones. Se halla el m.c.m. de todos los denominadores y éste es el denominador común. A continuación se divide el m.c.m. entre cada denominador antiguo y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.

m.c.m.: $(yz, xz, xy) = xyz$

$$\frac{x}{yz} = \frac{x^2}{xyz}$$

$$\frac{y}{xz} = \frac{y^2}{xyz}$$

$$\frac{z}{xy} = \frac{z^2}{xyz}$$

Ej.: Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{(a + b)^2 - (x + y)^2}{(a + x)^2 - (b + y)^2}$

$$\frac{(a + b)^2 - (x + y)^2}{(a + x)^2 - (b + y)^2} = \frac{[(a + b) + (x + y)]\,[(a + b) - (x + y)]}{[(a + x) + (b + y)]\,[(a + x) - (b + y)]} =$$

$$= \frac{(a + b + x + y)\,(a + b - x - y)}{(a + x + b + y)\,(a + x - b - y)} = \frac{a + b - x - y}{a + x - b - y}$$

Ej.: Simplificar: $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

Hallaremos el M.C.D. del numerador y denominador.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 1 & x^3 + x^2 + x + 1 \\ \hline -x^4 - x^3 - x^2 - x & x - 1 \\ \quad -x^3 - x^2 - x - 1 & \\ \quad\quad x^3 + x^2 + x + 1 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

M.C.D. $= x^3 + x^2 + x + 1$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1} = \frac{1}{x - 1}$$

Ej.: Hallar el verdadero valor de la expresión: $\dfrac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$ para $x = 1$.

Inicialmente sustituiremos x por 1 en la fracción dada.

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 + 4}{1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Ej.: Hallar el verdadero valor de la expresión: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ para $x = 1$.

Inicialmente sustituiremos x por 1 en la fracción dada.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Constantemente se registran casos de "faquirismo" que están dejando en mantillas a los más destacados yoguistas orientales. Hace algún tiempo el faquir Burmah poseía el récord de hambre con 56 días de ayuno, que le arrebató en la ciudad de Trieste el yoguista Delfos, que estableció uno nuevo de 61 días. Poco después, en Génova, la señora Nadia Goya lograba permanecer encerrada en una urna de cristal 62 días, dos horas y veinte minutos, alimentándose de agua mineral y fumando cigarrillos, sin otra distracción durante su voluntario encierro que hacer "solitarios" con una baraja. Pero este récord no permaneció mucho tiempo en poder de la mencionada señora Nadia, ya que la alemana Peter Gebharty iniciaba científicamente la huelga de hambre y conseguía en Kaslssuhe un nuevo récord, esta vez de 66 días y 4 horas. Entre tanto, el faquir argentino Chassman intentaba obtener un nuevo récord, batiendo el anterior: para ello se encerró en una caja de plexiglás, pero esta vez con "bocadillos". El muy astuto había mezclado en el agua mineral que tomaba gran cantidad de vitaminas que fueron descubiertas a los 40 días de ayuno por dos médicos que analizaron las botellas. Indignada por el procedimiento de este falso colega, la Sra. Nadia Goya no dudó en realizar otro experimento, pero esta vez más difícil que los anteriores, ya que intentaba poner a salvo el honor de los faquires. Este intento fue coronado por el éxito más completo: permaneció encerrada 65 días y 6 horas. Durante ese tiempo fumó 1.300 cigarrillos, bebió 230 litros de agua y perdió 16 Kg.

Este nuevo récord ganado con tanto sacrificio fue de poca duración, ya que en Italia un faquir lo batía permaneciendo encerrado 72 días, 3 horas y 3 minutos sin probar bocado. Este récord también ha sido batido, ya que el 10 de octubre del 1951 un hipnotizador de New York, de 30 años de edad, llamado Yack Wafer, salía de su encierro en un féretro de cristal a los 76 días de ayuno, batiendo el récord mundial.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LOS TRENES (pág. 226)

Sin ninguna duda los dos estarán a **la misma distancia de Madrid.**

SOLUCION AL PROBLEMA DE LAS 4 PESAS (pág. 235).

La fórmula sería, sin la menor duda:

$$3m_1 + 1 = 40$$

$$m_1 = \frac{40-1}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

$$m_1 = 13$$

$P_1 = 2m_1 + 1 = 2 \times 13 + 1 =$
$= (27)$ tope del peso superior.

$$3n_2 + 1 = 13;\ n_2 = \frac{13-1}{3} = 4$$

$P_2 = 2n_2 + 1 = 4 \times 2 + 1 = (9)$

$$3m_3 + 1 = 4;\ m_3 = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$P_3 = 2m_3 + 1 = 2 \times 1 + 1 = (3)$

$$3m_3 + 1 = 4;\ m_3 = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$P_4 = (1)$

La solución será 1-3-9-27. Comprobadlo por... si acaso.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA EDAD (pág. 236)

Llamaremos (x) a los años.
Dentro de 5 años x + 5.
Hace 5 años x − 5.
Luego ya tenemos la ecuación:

$$5(x+5) - 5(x-5) = x$$

$$5x + 25 - 5x + 25 = x$$

$$25 + 25 = x \qquad x = 50$$

Comprobemos:
Dentro de 5 años (50 + 5) = = 55
Tomándolo 5 veces (55×5) = = 275
Hace 5 años (50 − 5) = 45
Tomándolo 5 veces (45×5) = = 225
Restándolos: 275 − 225 = = 50 años.

Como reproduce un valor indeterminado, habrá que simplificar la fracción. Podemos hacerlo por diversos procedimientos. Uno de ellos es dividiendo por el M.C.D. del numerador y denominador. Otro procedimiento es que como el numerador y el denominador se han anulado para $x = 1$, por aplicación del teorema del resto, tienen que ser divisibles por el binomio $x - 1$ $(x = 1)$. Por este último procedimiento lo vamos a realizar, por Ruffini.

	$x^2 - 3x + 2$	$x - 1$
	$1 \quad -3 \quad 2$	
1	$\quad 1 \quad -2$	
	$1 \quad -2$	0

COCIENTE $= x - 2$

	$x - 1$	$x - 1$
	$1 \quad -1$	
1	$\quad 1$	
	1	0

COCIENTE $= 1$

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{x - 2}{1} = x - 2$$

Así que el verdadero valor de la expresión resulta de sustituir 1 en $x - 2$ (expresión simplificada): $x - 2 = 1 - 2 = -1$.

14.–ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS POLINOMIOS

A la vista de todas las operaciones y del conocimiento exhaustivo que se hizo de las estructuras algebraicas en el tema correspondiente podemos decir lo siguiente.

Que en el conjunto de todos los polinomios P, y definidas la suma y el producto como leyes de composición interna, se cumplen las siguientes propiedades:

Ley { Asociativa, Conmutativa, Elemento neutro, Elemento simétrico } (P, +) Grupo abeliano

Ley { Asociativa, Conmutativa, Elemento neutro } (P, ·) Semigrupo abeliano con elemento neutro

Ley y { Distributiva

Luego (P, +, ·) es un anill[illegible]

NOTA.–El elemento simétrico respecto a la ley no existe, ya que no existe ningún polinomio que multiplicado por otro no reproduzca 1 (elemento neutro respecto a la operación ·), excepto que éste se reduzca a un número.

Sin embargo, en el caso del conjunto F de las fracciones racionales sí existe elemento simétrico respecto a la operación ·, lo que nos lleva a pensar que (F, + · es un cuerpo.

Por supuesto, en cualquiera de los casos, la propiedad distributiva se verifica del producto respecto a la suma.

TEMA 15

RADICACION

INDICE

1.–CONCEPTO DE RAIZ.
2.–CONEXION ENTRE LA RADICACION Y LA POTENCIACION O VICEVERSA.
3.–PRODUCTO DE RADICALES DEL MISMO INDICE.
4.–COCIENTE DE RADICALES DEL MISMO INDICE.
5.–REDUCCION DE RADICALES A INDICE COMUN.
6.–SIMPLIFICACION DEL INDICE Y DEL EXPONENTE DEL RADICANDO.
7.–EXTRACCION DE FACTORES.
8.–POTENCIA DE UNA RAIZ.
9.–RAIZ DE RAIZ.
10.–RACIONALIZACION.
11.–ESTUDIO DE LA RAIZ CUADRADA.
A.–Cálculo de la raíz cuadrada.
B.–Restos por exceso y por defecto en una raíz cuadrada.

TEMA 15

El papiro más antiguo que existe quizá sea el papiro de AHMES; contiene 80 problemas de álgebra solucionados. Se ha hecho ya clásico el problema llamado de los sietes, que es:

En un poblado existen siete casas; cada casa tiene siete gatos; cada gato mata siete ratones que, a su vez, estos roedores se habían comido cada uno siete espigas de trigo, y cada una de estas espigas de trigo, al sembrarlas, producirían siete arrobas de grano. ¿Cuál es el total del grano?

$7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$
$= 16.807$ arrobas de grano

Ya sabemos, así pues, que la potenciación se descubrió y se usaba por los matemáticos egipcios hace 35 siglos.

RADICACION

1.–CONCEPTO DE RAIZ

$$\left.\begin{array}{l} \text{Indice} \\ \text{Radical} \\ \text{Radicando} \end{array}\right\} \text{RAIZ}$$

$$\sqrt[n]{a}$$

y leeremos: "raíz de índice n de a"

Ej.: Identificar los elementos de la raíz: $\sqrt[3]{2}$

Indice = 3

Radicando = 2

Radical = es el signo $\sqrt{}$

NOTA.–Hay que hacer constar que si una raíz no lleva expreso el número que indica su índice, automáticamente supondremos que es 2 (es decir raíz cuadrada).

Cualquier raíz tiene un resultado entero, racional o irracional

Pues bien, la prueba de que cualquier raíz está correctamente hecha se obtiene elevando el resultado al índice de la raíz, operación que tiene que coincidir con el radicando.

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow a = b^n$$

Ej.: $\sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow 27 = 3^3$

2.–CONEXION ENTRE LA RADICACION Y POTENCIACION O VICEVERSA

Cualquier raíz se puede poner como una potencia de exponente fraccionario. La base de la potencia es siempre la base del radicando de la raíz y el exponente una fracción que tiene por nume-

rador al exponente del radicando y por denominador al índice de la raíz.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ej.: $\sqrt[3]{2^7} = 2^{\frac{7}{3}}$

Ej.: $\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$

NOTA 1.—Es lógico pensar, y es así, que si cualquier raíz se puede poner en forma de potencia, todas las operaciones de radicación se pueden manejar con la potenciación.

De todas formas, el operar la radicación como potenciación exige una gran habilidad de cálculo y además, ya de por sí, es necesario tener conocimiento de las operaciones propias que rigen la radicación.

Ej.: Operar con potenciación la expresión: $\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt{2}$

$$\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt{2} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{8+3}{6}} = 2^{\frac{11}{6}} = \sqrt[6]{2^{11}}$$

NOTA 2.—Lo mismo que se dijo en potenciación es válido para la radicación. Siempre que se puedan descomponer en factores primos los radicandos de las raíces, será conveniente hacerlo con objeto de llegar a una mayor simplificación de la expresión propuesta.

NOTA 3.—La suma y la diferencia de radicales no admite transformación dentro de la operativa de la radicación, aun teniendo el mismo o distinto índice (asunto semejante se dijo también en potenciación).

NOTA 4.—En la potenciación nos teníamos que fijar en si los exponentes eran iguales para transformar operaciones. En la radicación nos tendremos que asegurar que los índices sean iguales para efectuar cualquier tipo de transformación posible.

NOTA 5.—Todas las operaciones que se exponen a continuación son reversibles. Es decir, se pueden realizar también en sentido inverso.

3.—PRODUCTO DE RADICALES DEL MISMO INDICE

El resultado es otro radical que tiene por índice al mismo, y por radicando el producto de los radicandos.

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ej.: $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$

4.—COCIENTE DE RADICALES DEL MISMO INDICE

El resultado es otro radical que tiene por índice al mismo, y por radicando al cociente de los radicandos.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ej.: $\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{10}{2}} = \sqrt[4]{5}$

Buda, hijo de un noble asiático, disponía en su juventud de todos los placeres y riquezas que existían.

Palacios de invierno, palacios de verano, y todo cuanto pudiera desear.

Cierto día, al salir de la muralla que delimitaba uno de sus palacios, se encontró con un anciano, y le preguntó:

—¿Tú quién eres?

El anciano le contestó:

—La vejez, por la que hemos de pasar todos.

Volvió al palacio, y a los pocos días hizo una nueva salida, encontrándose a un enfermo.

Le preguntó:

—¿Tú quién eres?

—Un hombre enfermo.

—¿Y qué es la enfermedad?

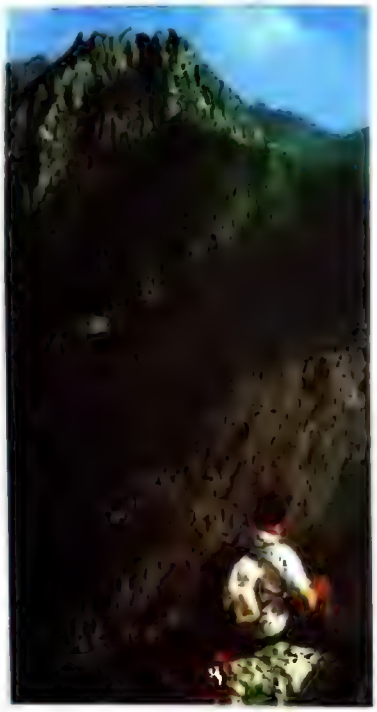
—Un mal, una dolencia —le contestó.

Volvió al palacio. A los pocos días volvió a salir, y se encontró con un cortejo fúnebre, y preguntando ¿qué lleváis en ese arcón?, le contestaron: un muerto. Preguntó:

—¿Y qué es la muerte?

—La muerte es el fin de la vida, por la que hemos de pasar todos.

Estos encuentros cambiaron al joven Buda, que ya no volvió a regresar a palacio. Comenzó una peregrinación a través del mundo, y dice la leyenda que todavía hoy sigue dicha peregrinación.



RESPIRAR BIEN

La mayor parte de las personas tienen una forma de respirar totalmente contraria a la forma natural. Respiran (inspiran y expiran) por la **boca**.

Cuando habéis hecho un esfuerzo grande, sabéis que para recuperaros lo antes posible aspiráis por la **nariz** y expeléis por la **boca**. Entonces, ¿por que no hacer eso mismo en todo momento, y sin necesidad de tener que estar cansado para hacerlo? Hacedlo así, probadlo; os asombraréis de los resultados. ¡Es tan triste ver por las calles gente, incluso joven, que va encorvada al andar, y con la boca abierta de par en par! Aprended a respirar y aprended a andar. Haciendo correctamente ambas cosas, adquiriréis una marcialidad y armonía de movimientos que al cabo de pocas semanas vuestro talante físico adquirirá formas atléticas.

5.–REDUCCION A RADICALES DE INDICE COMUN

Es posible que tengamos que efectuar una operación de multiplicación o división de radicales, y éstos no tengan el mismo índice, operación que no podremos realizar por no ajustarse a las normas del cálculo que exigen que los radicales tengan el mismo índice.

Pues bien, para solucionar este problema y poder operar, tendremos que reducir los radicales al mismo índice, con el proceso que se detalla a continuación:

– Primeramente hallaremos el m.c.m. de todos los índices. Este m.c.m. es el nuevo índice común a todos los radicales de la operación.

– A continuación, con objeto de no alterar los valores iniciales de las raíces, dividiremos el m.c.m. entre cada índice antiguo, y el resultado de la división es a lo que hay que elevar el respectivo radicando.

– Una vez reducidos a índice común todos los radicales, ya tendremos preparada la expresión para operarla con las reglas de cálculo del producto y cociente.

Ej.: Reducir a índice común los radicales: $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[6]{7}$

Hallamos m.c.m. (3, 4, 6) = 12, y éste es el índice común.

Dividimos el m.c.m. (3, 4, 6) = 12 entre cada índice antiguo:

$$12 \;\underline{|3}\quad 4 \qquad 12 \;\underline{|4}\quad 3 \qquad 12 \;\underline{|6}\quad 2$$

y cada cociente es a lo que habrá que elevar el respectivo radicando.

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$$

$$\sqrt[6]{7} = \sqrt[12]{7^2}$$

Ej.: Operar la siguiente expresión: $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2\cdot 10}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 10}{5}} = \sqrt[3]{4}$$

Ej.: Operar la siguiente expresión: $\dfrac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{8}}$

$$\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^5}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2\cdot 2^5}}{\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[4]{\frac{2\cdot 2^5}{2^3}} = \sqrt[4]{2\cdot 2^5\cdot 2^{-3}} = \sqrt[4]{2^3}$$

Ej.: Operar la siguiente expresión: $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{9}}$

Obsérvese que como los radicales no tienen el mismo índice, habrá que reducirlos a índice común:

m.c.m. (2, 3, 5) = 30

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{9}}=\frac{\sqrt[30]{3^{15}}\cdot\sqrt[30]{3^{10}}}{\sqrt[30]{9^6}}=\frac{\sqrt[30]{3^{15}\cdot 3^{10}}}{\sqrt[30]{(3^2)^6}}=\sqrt[30]{\frac{3^{15}\cdot 3^{10}}{3^{12}}}=$$

$$=\sqrt[30]{3^{15}\cdot 3^{10}\cdot 3^{-12}}=\sqrt[30]{3^{13}}$$

6.–SIMPLIFICACION DEL INDICE Y DEL EXPONENTE DEL RADICANDO

Téngase en cuenta que cuando queramos transformar una raíz en potencia, el exponente de esta potencia resulta ser una fracción que contiene al exponente del radicando (numerador) y al índice de la raíz (denominador), pues bien, como estos dos elementos representan en realidad una fracción, admiten simplificación como todas las fracciones.

Así que podremos dividir el índice y el exponente del radicando por un divisor común a ambos o por su M.C.D. con lo que resultarán totalmente simplificados.

Ej.: Simplicar: $\sqrt[8]{3^6}$

$$\sqrt[8]{3^6}=\sqrt[4]{3^3}$$

Ej.: Simplificar: $\sqrt[4]{2^2}$

$$\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$$

7.–EXTRACCION DE FACTORES DE UN RADICAL

Esta operación únicamente se puede realizar cuando el exponente del radicando es mayor o igual que el índice de la raíz, y consiste en extraer todas las bases posibles del radicando fuera de la raíz.

Para ello, se divide el exponente del radicando, entre el índice de la raíz. Sale fuera del raíz la base elevada al cociente de la división y queda dentro de la raíz la base elevada al resto de la división.

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{con} \quad m \geqslant n \rightarrow \begin{array}{c|c} m & n \\ \underbrace{r} & c \end{array}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^c\sqrt[n]{a^r}$$

Ej.: Sacar factores en la expresión: $\sqrt[5]{3^{14}}$

$$\begin{array}{c|c} 14 & 5 \\ \underbrace{4} & 2 \end{array}$$

$$\sqrt[5]{3^{14}}=3^2\sqrt[5]{3^4}$$

La literatura sensacionalista, la televisión y el cine mitificaron notablemente el trabajo de los ordenadores y aún hoy día es corriente la idea de que son máquinas que realmente piensan, dotadas de portentosas facultades capaces de ejecutar fantásticas proezas, como adivinar el porvenir. Lo cierto es que los ordenadores están ayudando al hombre a realizar la parte mecánica o repetitiva de su trabajo.

Durante los años anteriores a la introducción masiva de estos equipos, los grupos encargados de los grandes proyectos invertían una parte ingente de su capacidad intelectual en realizar cálculos complicadísimos; las recientes aventuras espaciales, el viaje lunar y todos los proyectos de este tipo son impensables sin estos sofisticados equipos que inteligentemente programados por los mejores cerebros de cada especialidad resuelven espectaculares problemas matemáticos, astronómicos o de resistencia de materiales. Por otra parte, el ordenador abrió las puertas al microordenador de aplicación práctica en las pequeñas empresas. Su estructura y funcionamiento son idénticos a los grandes, de acuerdo con su campo de aplicación; sus prestaciones se orientan a la industria o a la gestión burocrática de las empresas; asimismo los terminales conectados a una unidad central se imponen en el terreno bancario y en las empresas con gran número de sucursales, operando simultáneamente.

Los caminos del imperio Inca superaron en longitud a las famosas calzadas romanas. Cuando los españoles, al mando de Pizarro, desembarcaron en Tumbes, quedaron maravillados de esta red de comunicaciones que atravesaba gargantas estrechas, picos de vértigo, hielos y rocas.

Puede parecer sorprendente el hecho de que este imperio tan perfecto cayera frente a un grupo de jinetes españoles.

De hecho, los incas fueron derrotados en parte por sus luchas internas y también por sus mitos y leyendas.

En la caída del imperio Inca pueden verse analogías sorprendentes con la derrota de los aztecas en Méjico.

Quetzalcoatl, la serpiente emplumada de los aztecas, los abandonó retirándose por el mar, y por este mismo camino apareció Cortés con sus conquistadores.

En la misma forma, Viracocha, el dios blanco de los peruanos, señor del trueno, también había desaparecido en las aguas del lago Titicaca.

Cortés en Méjico y Pizarro en Perú aprovecharon sabiamente estas creencias indígenas para dominarlos.

Ej.: Sacar factores fuera de la expresión: $\sqrt{2^8}$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \underline{0} & 4 \end{array}$$

$$\sqrt{2^8} = 2^4\sqrt{2^0} = 2^4\sqrt{1} = 2^4$$

Ej.: Sacar factores de la expresión: $\sqrt[3]{2}$

No se puede, porque el exponente del radicando es menor que el índice de la raíz ($1 < 3$).

8.–POTENCIA DE UNA RAIZ

El resultado es otra raíz del mismo índice, en donde el exponente de la potencia pasa a elevar al radicando de la raíz.

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

Es decir:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{(a^m)^p} = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

Ej.: Operar la expresión: $(\sqrt[5]{2})^4$

$$(\sqrt[5]{2})^4 = \sqrt[5]{2^4}$$

Ej.: Operar la expresión: $(\sqrt[11]{2^3})^2$

$$(\sqrt[11]{2^3})^2 = \sqrt[11]{(2^3)^2} = \sqrt[11]{2^6}$$

9.–RAIZ DE RAIZ

Es el caso en que una raíz se encuentra introducida en otra.

Podemos distinguir tres tipos:

a) Cuando una raíz está perfectamente introducida dentro de otra. En este caso la nueva raíz tiene por índice el producto de los índices y por radicando el único existente.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Sirva como justificación:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{(a^{1/n})} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ej.: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$

Ej.: $\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) Cuando una raíz está dentro de otra, pero existe algo que las separa en forma de producto.

Este caso se debe reducir al primero a mediante una simple operación.

$$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m \cdot b}} = \sqrt[m\cdot n]{a^n \cdot b}$$

Obsérvese que se ha introducido a en la raíz enésima, luego entrará como a^n.

Ej.: Operar la expresión: $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{3}}$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3}$$

Ej.: Operar la expresión: $\sqrt{2\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^3}$$

c) Cuando una raíz está dentro de otra, pero existe algo que las separa en forma de suma o diferencia.

Este caso es realmente complejo, ya que se entiende que una expresión de este tipo admite transformación cuando se puede expresar mediante la suma o diferencia de dos radicales que en un principio son desconocidos y que tendremos que calcular mediante un sistema de ecuaciones (aunque no se ha llegado al tema de ecuaciones, se incluye este caso con objeto de plantear el tema en toda su extensión).

De todas formas, el planteamiento se va a realizar para raíces cuadradas.

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Ej.: Transformar el radical $\sqrt{11 - 3\sqrt{8}}$ en la suma de dos radicales.

$$\sqrt{11 - 3\sqrt{8}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\left(\sqrt{11 - 3\sqrt{8}}\right)^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2;\ 11 - 3\sqrt{8} = x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$11 - 3\sqrt{8} = x + y + 2\sqrt{xy}$ (identificamos partes racionales e irracionales del primero y segundo miembros).

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ 2\sqrt{xy} = -3\sqrt{8} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ (2\sqrt{xy})^2 = (-3\sqrt{8})^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ 4xy = 72 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ xy = 18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 11 - y \\ (11 - y)\,y = 18;\ 11y - y^2 = 18;\ y^2 - 11y + 18 = 0 \end{array}\right.$$

$$y = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2} = \begin{cases} 9 \\ 2 \end{cases}$$

Para $y = 9 \Rightarrow x = 2$

Para $y = 2 \Rightarrow x = 9$

La calculadora es una máquina electrónica capaz de realizar cálculos a una velocidad inverosímil.

La primera calculadora que se conoce fueron los dedos de la mano (ya explicada en el fascículo 1.º); después el ábaco (también explicado en el fascículo 1.º).

La primera máquina de operar fue inventada en el año 1620 por Pascal. Consistía en un complicado sistema de ruedas dentadas y una numeración del 1 al 9.

En 1670, Leibnitz inventa una maquina que hacía multiplicaciones, y Babbage, en 1834, inventa la máquina de calcular con el sistema de tarjetas perforadas.

En 1947 el profesor Von Neuman inventa una calculadora, con las cuatro reglas, que realiza operaciones en cinco milésimas de segundo.

En 1951 se le incorpora a la misma máquina memoria, y entonces se hizo más rápida aún la velocidad de cálculo. A esta máquina se la llamó Endivac y fue la primera fabricada en serie.

En 1960 fueron los japoneses los que entraron en liza en fabricar calculadoras de bolsillo y miniaturas, hasta tal punto que existen hoy día calculadoras de 1 cm.

Los portugueses contribuyeron grandemente al perfeccionamiento del arte de navegar.

Desde los tiempos de Enrique el Navegante, sus marineros usaron en las carabelas la brújula y el astrolabio, convertido más tarde en el sextante y que servía para establecer la latitud midiendo la altura del sol al medio día.

Todavía tuvieron que transcurrir otros trescientos años antes de que la longitud se pudiera medir con exactitud, aumentando así la seguridad de los buques, y fue posible gracias a la invención y desarrollo del cronómetro.

Los catalanes y mallorquines confeccionaron mapas marinos con relativa perfección.

Tras los grandes adelantos en la construcción de buques, artillería y útiles de navegación, del perlodo 1450-1550, siguió un estancamiento que duró dos siglos al haberse conseguido casi el máximo con los medios tecnológicos de aquella época.

Luego la transformación resultará:

$$\sqrt{11-3\sqrt{8}}=\sqrt{2}+\sqrt{9}$$

$$\sqrt{11-3\sqrt{8}}=\sqrt{2+3}$$

10.–RACIONALIZACION

Los radicales de una expresión pueden manifestarse de cualquier forma. Una de las formas es que éstos estén en forma de cociente.

Cuando en un cociente existen radicales en el numerador no hay razón para eliminarlos; sin embargo cuando estén en el denominador es necesario que desaparezcan como buena norma en Matemáticas y además con el motivo de poder obtener un mayor rigor numérico en el posible resultado de la expresión.

Pues bien, se entiende por racionalización a aquellos procesos que permiten eliminar los radicales del denominador de una fracción.

Se pueden presentar varios casos:

a) Cuando el radical se encuentra en forma de producto en el denominador.

En este caso, multiplicaremos numerador y denominador de la expresión dada por un radical con el mismo índice del que queremos eliminar y que tiene por radicando el mismo, elevando a la diferencia del índice de la raíz menos el exponente del radicando antiguo.

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}\cdot\frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n}}}=\frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}$$

$$a^{\frac{n}{m}}\cdot a^{\frac{m-n}{m}}=a^{\frac{n}{m}+\frac{m-n}{m}}=a^{\frac{n+m-n}{m}}=a^{\frac{m}{m}}=a$$

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}}=\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{2^{7-3}}}{\sqrt[7]{2^{7-3}}}=\frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3}\cdot\sqrt[7]{2^4}}=\frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3\cdot 2^4}}=\frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}}=\frac{\sqrt[7]{2^4}}{2}$$

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{5}}$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\frac{\sqrt[4]{5^3}}{2\cdot 5}=\frac{\sqrt[4]{5^3}}{10}$$

Obsérvese que lo único que nos interesa es eliminar el radical del denominador, el 2 que aparece multiplicando a éste, no es necesario manipularlo, ya que no es irracional, y lo vamos acumulando hasta la operación final.

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^7}}$

Obsérvese que este caso no se puede racionalizar tal como está expuesto, ya que la diferencia $3 - 7 = -4$ es negativa y debe ser positiva.

Es decir, que la expresión exige una preparación previa, antes de poder aplicar el proceso de la racionalización. Esta preparación consiste en sacar fuera del radical todos los factores posibles.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \underbrace{1} & 2 \end{array} \qquad \sqrt[3]{5^7} = 5^2\sqrt[3]{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5^7}} = \frac{1}{5^2\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{5^2 \cdot \sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5^2 \cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5^3} = \frac{\sqrt[3]{25}}{125}$$

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}$

Antes de racionalizar deberemos de preparar el denominador operándolos:

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{3}$$

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{3}{\sqrt[5]{36}}$

En este caso, aunque se puede racionalizar tal como nos presentan el denominador, suele ser más conveniente racionalizar con el radicando descompuesto en factores primos.

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{36}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^2 \cdot 3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^3}}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{3\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^3}}{\sqrt[5]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^3}}{\sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5}} = \frac{3\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^3}}{2} = \frac{\sqrt[5]{216}}{2}$$

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{abc}{\sqrt[3]{a^2bc}}$

$$\frac{abc}{\sqrt[3]{a^2bc}} = \frac{abc}{\sqrt[3]{a^2bc}} \cdot \frac{\sqrt[3]{ab^2c^2}}{\sqrt[3]{ab^2c^2}} = \frac{abc\sqrt[3]{ab^2c^2}}{abc} = \sqrt[3]{ab^2c^2}$$

b) Cuando el radical se encuentra en forma de suma o diferencia en el denominador (con radicales de índice 2).

En este caso, multiplicaremos numerador y denominador de la expresión dada por la expresión conjugada del denominador.

PARTIDAS DE AJEDREZ

Ya sabemos la cantidad de granos de trigo pedida como premio al rey por la invención del ajedrez.

Yo soy muy amante de dicho juego, pero por desgracia entre dirigir la editorial y escribir estos problemitas de entretenimiento se me van casi dieciséis horas diarias. Díganme entonces el tiempo que me queda para jugar una partida de ajedrez.

Este problema que voy a relatar a continuación se me ocurrió en uno de los viajes de negocios que hice a Barcelona. Allí existen muchos cafés y bares donde el juego es... el ajedrez.

Se estaba realizando una partida, mientras yo tomaba mi café en la barra, y me acerqué de mirón. Un contrincante le dijo al otro que si, a lo largo de tantos años de jugarse al ajedrez y tanta gente, se habrían realizado ya todas las partidas posibles. Yo no mencioné nada y al cabo de los años lo recordé y ahora lo expongo.

Veamos desde la salida. Al mover la primera pieza, los blancos tienen 20 jugadas, o sea 16 jugadas los blancos según muevan una casilla o dos (incluso si mueven dos peones una casilla cada uno) y otras cuatro el salto de los dos caballos. Pero a cada uno de estos movimientos responden los negros con otros 20, y ya tenemos $20 \times 20 = 400$ posibles movimientos después de la primera jugada de las blancas y de las negras ¿no? Sea cual sea el movimiento de los peones (1.er movimiento), para la segunda jugada tendremos 30 variantes a elegir; solamente la dama dispone de 27 espacios o casillas para jugar.

Para las primeras 5 jugadas, 20 variantes. 30 para las demás, tendremos:

$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70}$

Por término medio una partida de ajedrez contiene 40 movimientos.

En fin, si toda la humanidad no se dedicara más que a jugar las 24 horas del día, y moviendo **vertiginosamente** una pieza **cada segundo**, las partidas posibles durarían sólo... $,10^{100}$ SIGLOS.

AREA DEL RECTANGULO

La recaudación de los impuestos antiguamente estaba encomendada a los sacerdotes.

Veían un campo y a simple vista sabían lo que debía pagar de impuesto el propietario.

Un día un sacerdote, visitando una fábrica de ladrillos, vio cómo los esclavos ponían los ladrillos en el suelo para luego meterlos al horno para su secado. En el suelo vieron hileras de estos ladrillos y observaron que no tenían que contarlos todos sino que contando los de una hilera y multiplicarlos por el número de hileras sabían los ladrillos que había (base por altura). Así, de esta manera, nació "el área del rectángulo".

Esta fue la **madre** de todas las áreas de las figuras geométricas.

Entendiendo por expresión conjugada a la misma, sólo que con el signo que une los radicales cambiados.

El motivo de utilizar la expresión conjugada es para que en el denominador aparezca siempre una suma por una diferencia, que podremos transformar en diferencia de cuadrados, que nos invitará a eliminar los radicales de forma instantánea.

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$$

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{4}}{7-2}=\frac{\sqrt{14}-2}{5}$$

c) Cuando los radicales estan en el denominador en forma suma o diferencia (con radicales no necesariamente de índice

Este caso es más complejo; lo que se suele hacer muchas veces es efectuar una división polinómico numérica. Veámoslo con un ejemplo.

Ej.: Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$

En los tipos anteriores de racionalización hemos visto que teníamos que multiplicar el denominador de la fracción por una expresión, tal que obtuviéramos la base de los radicandos simplemente. Aquí seguiremos el mismo criterio, pero desconociendo la expresión que va a producir tal transformación.

$$(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3})\,x=7-3\Rightarrow x=\frac{7-3}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$$

Y en este instante es donde entra en juego la división polinómica que efectuamos a continuación, y con cuyo cociente multiplicaremos el numerador y el denominador de la expresión dada.

$$\begin{array}{r|l} 7-3 & \sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3} \\ \hline -7+\sqrt[3]{3\cdot 7^2} & \sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 7} \\ \hline -3+\sqrt[3]{3\cdot 7^2} & \\ 3-\sqrt[3]{3^2\cdot 7} & \\ \hline \sqrt[3]{3\cdot 7^2}-\sqrt[3]{3^2\cdot 7} & \\ -\sqrt[3]{3\cdot 7^2}+\sqrt[3]{3^2\cdot 7} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Es decir que:

$$x=\frac{7-3}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 7}$$

luego

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 7}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 7}}=\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 7}}{7-3}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 7}}{4}=\frac{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{21}}{4}$$

NOTA.–Aquí damos por finalizadas todas las operaciones que rigen la radicación. Pues bien, en cualquier expresión que nos planteen, si es posible, es necesario aplicar cualquiera de ellas, hasta agotar las posibilidades operativas.

Ej.: Operar la expresión: $\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^{-2}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^{-2}=\frac{(\sqrt{2})^{-2}(\sqrt[3]{2})^{-2}}{(\sqrt[4]{2})^{-2}}=\frac{\sqrt{2^{-2}}\sqrt[3]{2^{-2}}}{\sqrt[4]{2^{-2}}}=\frac{\sqrt[12]{2^{-12}}\sqrt[12]{2^{-8}}}{\sqrt[12]{2^{-6}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[12]{2^{-12}\cdot 2^{-8}}}{\sqrt[12]{2^{-6}}}=\sqrt[12]{\frac{2^{-12}\cdot 2^{-8}}{2^{-6}}}=\sqrt[12]{2^{-12}\cdot 2^{-8}\cdot 2^{-6}}=\sqrt[12]{2^{-14}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2^{14}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[6]{2^7}}=\frac{1}{2\sqrt[6]{2}}=\frac{1}{2\sqrt[6]{2}}\cdot\frac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[6]{2^5}}=\frac{\sqrt[6]{2^5}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt[6]{2^5}}{2^2}=\frac{\sqrt[6]{32}}{4}$$

Ej.: Operar y simplificar: $\frac{2}{2+\sqrt{2}}-\frac{3}{3+\sqrt{6}}-\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Para operar esta expresión es mejor operar cada una de las partes de la expresión por separado, y una vez obtenido el resultado, llevarlo de nuevo a la expresión propuesta:

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2}=$$

$$=\frac{2(2-\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$$

PROBLEMA DE LA LOGICA

Una mesa con tres patas nunca se balancea aunque una de las patas sea más corta o más larga que las otras dos. Esta es la creencia general. Sin embargo, las mesas normalmente las fabrican con cuatro patas. De aquí nos surge el problema. ¿Cuál de ellas ajusta mejor en cualquier superficie?

LA SOLUCION EN (pág. 288).

En una feria ambulante existía n número que tenía gran éxito. Un señor vestido con sombrero tenía una pistola en la mano. Su señora le vendó los ojos, le dio varias vueltas y quitándole el sombrero lo colgó. Le dijo a su marido que apuntara a donde él pensara que estaba el sombrero y disparara. Así lo hizo el señor y agujereó el sombrero.

Nuestra pregunta es: ¿cómo lo pudo conseguir?

SOLUCION

La respuesta es bien sencilla: la señora había colgado el sombrero en el cañón de la pistola.

$$\frac{3}{3+\sqrt{6}}=\frac{3}{3+\sqrt{6}}\cdot\frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}=\frac{3(3-\sqrt{6})}{3^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6}=$$

$$=\frac{3(3-\sqrt{6})}{3}=3-\sqrt{6}$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Luego:

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}}-\frac{3}{3+\sqrt{6}}-\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}-(3-\sqrt{6})-$$

$$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2-\sqrt{2}-3+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{2}=-1$$

Ej.: Operar y simplificar: $\dfrac{5}{\sqrt[3]{7-\sqrt{3}}}$

La racionalización de esta expresión incluye simultáneamente los dos casos de racionalización (a y b). Primeramente aplicaremos el caso b y después el caso a, aunque es indistinto hacerlo al revés.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{7-\sqrt{3}}}=\frac{5}{\sqrt[3]{7-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7+\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{7+\sqrt{3}}}=\frac{5\sqrt[3]{7+\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3})}}=$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{7+\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{7^2-(\sqrt{3})^2}}=\frac{5\sqrt[3]{7+\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{49-3}}=\frac{5\sqrt[3]{7+\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{46}}=\frac{5\sqrt[3]{7+\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{46}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt[3]{46^2}}{\sqrt[3]{46^2}}=\frac{5\sqrt[3]{(7+\sqrt{3})\cdot 46^2}}{46}=\frac{5\sqrt[3]{14.812+2.116\sqrt{3}}}{46}$$

Ej.: Operar: $\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{64}}}$

$$\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{64}}}=\sqrt{\sqrt{2^2\cdot 4\sqrt{64}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4\cdot 4^2\cdot 64}}}=$$

$$=\sqrt[8]{2^4\cdot(2^2)^2\cdot 2^6}=\sqrt[8]{2^4\cdot 2^4\cdot 2^6}=\sqrt[8]{2^{14}}=\sqrt[4]{2^7}=2\sqrt[4]{2^3}=2\sqrt[4]{8}$$

Ej.: Operar: $\sqrt{\dfrac{81^{-1/2}}{3^{-2}}}$

$$\sqrt{\frac{81^{-1/2}}{3^{-2}}}=\sqrt{\frac{(3^4)^{-1/2}}{3^{-2}}}=\sqrt{\frac{3^{-2}}{3^{-2}}}=\sqrt{1}=1$$

Ej.: Operar y simplificar: $\left(\frac{a^{1/3}\sqrt{a^3}}{\sqrt{a \cdot a^{-5/2}}}\right)^{-1}$

$$\left(\frac{a^{1/3} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a \cdot a^{-5/2}}}\right)^{-1} = \frac{(a^{1/3})^{-1}(\sqrt{a^3})^{-1}}{(\sqrt{a})^{-1}(a^{-5/2})^{-1}} = \frac{a^{-1/3} \cdot \sqrt{a^{-3}}}{\sqrt{a^{-1} \cdot a^{5/2}}} =$$

$$= \frac{a^{-1/3} \cdot a^{-3/2}}{a^{-1/2} \cdot a^{5/2}} = a^{-1/3} \cdot a^{-3/2} \cdot a^{1/2} \cdot a^{-5/2} = a^{-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}} =$$

$$= a^{\frac{-2-9+3-15}{6}} = a^{-23/6} = \frac{1}{a^{23/6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^{23}}} =$$

$$= \frac{1}{a^3\sqrt[6]{a^5}} = \frac{1}{a^3\sqrt[6]{a^5}} \cdot \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{a^3 \cdot a} = \frac{\sqrt[6]{a}}{a^4}$$

Ej.: De las raíces $\sqrt[10]{72}$ y $\sqrt[15]{597}$, averiguar cuál es mayor.

Es evidente que para compararlas tendremos que reducirlas a índice común, y la que tenga mayor radicando será la mayor.

m.c.m. (10, 15) = 30

$$\sqrt[10]{72} = \sqrt[30]{72^3} = \sqrt[30]{373248}$$

$$\sqrt[15]{597} = \sqrt[30]{597^2} = \sqrt[30]{356409}$$

De lo que deducimos que $\sqrt[10]{72}$ es la mayor.

Antonio Gaudí Cornet nace el 25 de junio de 1852 en el "Mas de la Calderería" (Camp de Tarragona), en el seno de una familia menestral dedicada desde generaciones al oficio de la calderería.

Dibujante precoz, concluye el bachillerato en Barcelóna y a los veintiún años ingresa en la Escuela de Arquitectura.

En 1878 obtiene el título. Cuenta entonces veintiséis años de edad, cuando conoce al gran prócer Eusebi Güell, que le facilita los primeros encargos de su carrera profesional.

Gaudí debuta como proyectista en diversos elementos urbanos entre ellos: las farolas de la Plaza Real de Barcelona y las destinadas a la futura Muralla del Mar, emprendiendo seguidamente la realización de sus grandes obras que le confirmarán como el genial visionario de la arquitectura moderna.

Su obra más conocida es el templo de la Sagrada Familia, cuya primera piedra fue colocada el día de San José de 1882, aunque la obra no se comenzó realmente hasta 1884.

El primer proyecto de estilo gótico era debido al arquitecto Villar. quien abandonó los trabajos por discrepancias con los patrocinadores de las obras. Gaudí se hizo cargo del proyecto apartándose rápidamente de la idea original para plasmar sus propios conceptos.

Empleó el resto de su vida en la dirección, llena de improvisaciones geniales realizadas sobre la marcha en la propia obra.

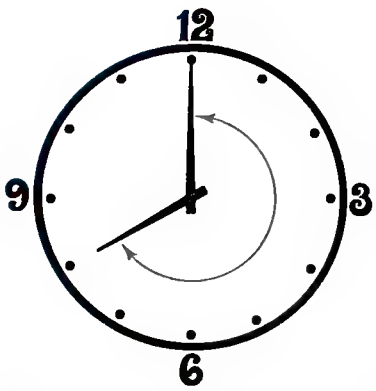
Destacan en Barcelona: La Casa Vicens, El Palau Güel, El Colegio Teresiano, Los Pabellones Güell, La Torre Bellesguard, La Casa Calvet, El Parc Güell, La Casa Batlló y la popular Casa Milá conocida como "La Pedrera".

Falleció, en medio de la más austera pobreza, en el Hospital de la Santa Creu el 10 de junio de 1926, después de haber sido atropellado por un tranvia en la barcelonesa Plaza de Tetuán.
Se le enterró dos dias más tarde en la cripta de su obra, el templo expiatorio de la Sagrada Familia.

PROBLEMA DEL RELOJ

Un reloj marca las 8 en punto. Sin la ayuda de un transportador, hay que calcular cuál es la magnitud del ángulo indicado en la figura.

LA SOLUCION EN (pág. 288).



11.—ESTUDIO DE LA RAIZ CUADRADA

Al principio del tema se ha puesto el criterio general que define una raíz. Como ahora de lo que se trata es del caso particular de raíz cuadrada, lo que habrá que hallar es un número tal, que elevado al cuadrado reproduzca el radicando de la raíz cuadrada.

A.—Cálculo de la raíz cuadrada.

Para calcular una raíz cuadrada seguiremos los siguientes pasos, según este esquema:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{(1)} & (2) \\ \hline \bullet & (3) \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \underbrace{(4)} & \end{array}$$

— Separaremos el radicando en grupos de dos cifras, empezando por la derecha del número (si al final, es decir, a la izquierda, queda un grupo de un solo número, no importa). Estamos en el lugar (1) del esquema.

— Se busca un número tal que elevado al cuadrado no sobrepase el primer grupo de la izquierda y se coloca en el lugar (2) del esquema, restando este resultado de primer grupo estudiado.

— Se coloca en el lugar (3) el doble de la cifra puesta en el lugar (2) y se repite la operación anterior con el residuo de la diferencia y bajando el grupo siguiente de números.

Junto al doble de lo existente en (2) se coloca un número: 0, 1, 2, ... 9, tal que multiplicado todo por este mismo, no sobrepase el número residual del radicando. Este número puesto pasa a formar parte de la solución.

— Y se procede sucesivamente hasta llegar al resto (4).

Ej.: Calcular: $\sqrt{12769}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1.27.69} & 113 \\ \hline 1 & 21 \cdot 1 = 21 \\ \hline 027 & 223 \cdot 3 = 669 \\ 21 & \\ \hline 669 & \\ 669 & \\ \hline \underbrace{0} & \end{array}$$

luego $\sqrt{12769} = 113$

Ej.: Calcular: $\sqrt{360{,}25}$

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{3.60.25} & 18{,}98 \\
\hline
1 & 28 \cdot 8 = 244 \\
\hline
260 & 369 \cdot 9 = 3321 \\
\hline
244 & 3788 \cdot 8 = 30304 \\
\hline
3625 & \\
3321 & \\
\hline
30400 & \\
30304 & \\
\hline
96 &
\end{array}
$$

luego $\sqrt{360{,}25} \simeq 18{,}98$

La estatua de Felipe IV es quizá uno de los mayores alardes de la escultura ecuestre que existen en España. Se inauguró en el año 1640, y en las diferentes fases de su construcción colaboraron grandes personajes de la época. Los cálculos matemáticos los ejecutó Galileo, los dibujos los realizó Velázquez y la escultura y vaciado en el bronce definitivo fue obra de Prieto Tacca.

Esta escultura se instaló primeramente en la Real Casa del 8uen Retiro, trasladándose en el año 1882 a su actual emplazamiento, el centro de la Plaza de Oriente de Madrid.

Felipe IV, hijo y sucesor de Felipe III, aunque dotado de mayores cualidades que su antecesor, prefirió abandonar la dirección de los negocios de Estado en manos de validos. De éstos el más famoso fue el Conde Duque de Olivares.

A este rey tenemos que agradecer los amantes de las artes su dedicación a ellas y la protección que prestó a Velázquez, a quien nombró su pintor real en el año 1623. En su corte pronto destacó este gran artista, consiguiendo fama y prestigio.

Felipe IV confió en Velázquez. Además de fomentar su abundante producción pictórica, retratos y grandes obras maestras que nos ha legado, lo envió dos veces a Italia como agente suyo para adquirir obras de otros artistas famosos con destino a sus colecciones reales.

Se puede asegurar que una parte muy importante de los tesoros pictóricos que hoy todos podemos admirar en el museo del Prado son el resultado de la colaboración de estos dos hombres singulares, el rey y su pintor.

SOLUCION DE PROBLEMAS

Solución al probleme de los caníbales de la página 245.

Cuando llegó a la bifurcación de los dos caminos, efectivamente allí se encontró con los dos caníbales y le preguntó a uno de ellos:

—"Si yo te preguntase cuál sería el camino de mi salvación, ¿qué me contestarías?"

Vamos a estudiar las dos posibilidades. Supongamos que le ha preguntado al que dice siempre la verdad. Ese no lo equivocaría, porque la verdad de la verdad es siempre la verdad.

Si la pregunta se la hizo al que dice siempre la mentira, entonces le diría la verdad, porque la mentira de la mentira es siempre la verdad.

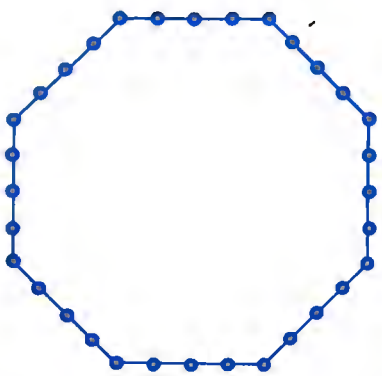
Luego la clave estaba en cómo hacer la pregunta.

Solución al problema de las 32 parsonas en 8 filas y 5 parsonas en cada fila de la página 249

En cada lado del octógono 5 personas que sumarán en total 32 personas.

$$8 \times 5 - 8 = 32$$

Sencillo, ¿verdad?



Ej.: Calcular: $\sqrt{0,0289}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0.02.89} & 0,17 \\ \hline 1 & 27 \cdot 7 = 189 \\ \hline 189 & \\ \hline 189 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

luego $\sqrt{0,0289} = 0,17$

B.—Resto por defecto y por exceso en una raíz cuadrada.

POR DEFECTO	POR EXCESO
$\sqrt{N}$ | a	$\sqrt{N}$ | $a+1$
^{r}d	^{r}e
$N = a^2 + {}^{r}d$	$N = (a+1)^2 - {}^{r}e$

$$\left.\begin{array}{l} N = a^2 + {}^{r}d \\ N = (a+1)^2 - {}^{r}e \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} N = a^2 + {}^{r}d \\ N = a^2 + 1 + 2a - {}^{r}e \end{array}\right\} \text{ Restando las dos igualdades}$$

$$0 = {}^{r}d - 1 - 2a + {}^{r}e$$

Obtenemos:

$$^{r}d + {}^{r}e = 2a + 1$$

Es decir, que en cualquier raíz cuadrada el resto por defecto más el resto por exceso es igual a dos veces la solución de la raíz por defecto más la unidad.

TEMA 16

ESTUDIO GENERAL DE ECUACIONES

INDICE

1.—Concepto de igualdad, identidad y ecuación.
2.—Transposición de términos. Reglas
3.—Ecuaciones de primer grado con una incógnita.
4.—Sistemas de ecuaciones de primer grado o lineales.
   A.—Método de sustitución.
   B.—Método de igualación.
   C.—Método de reducción.
   D.—Coordenadas cartesianas o rectangulares.
   E.—Método gráfico.
   F.—Sistemas de más de dos ecuaciones o incógnitas.
5.—Ecuación de segundo grado. Primera forma general. Soluciones.
6.—Naturaleza de las raíces de una ecuación.
7.—Ecuaciones incompletas de segundo grado.
8.—Suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado.
9.—Ecuación de segundo grado. Segunda forma general. Forma Canónica.
10.—Ecuación de segundo grado. Tercera forma general. Descomposición en producto.
11.—Representación gráfica de la ecuación en segundo grado.
12.—Sistema de ecuaciones de segundo grado.
13.—Ecuación Bicuadrada.
14.—Ecuaciones Irracionales.
15.—Ecuaciones recíprocas.
   A.—Ecuación recíproca de cuarto grado.
   B.—Ecuación recíproca de tercer grado.
   C.—Ecuación recíproca en quinto grado.
16.—Planteamiento de ecuaciones. Problemas.
17.—Problemas sobre móviles.
18.—Problemas sobre relojes.
19.—Problemas sobre grifos.
20.—Problemas sobre mezclas.
21.—Problemas sobre aleaciones.

TEMA 16

¿Es posible que dos hermanos sin parentesco alguno posible entre sí, pueden tener el mismo hermano?

Llamaremos A, B y C a los padres y a, b y c a los hijos. Realizando nuevos matrimonios después de enviudar o de divorciarse.

Señor A + Señora A
↓
a
fallece señora A

Señor A + Señora B
↓
b
fallece señor A

Señora B + Señor C
↓
c

El *a* y el *c* tienen el mismo hermano, el *b* y además, no están emparentados entre sí el *a* y el *c*.

1.—CONCEPTO DE IGUALDAD, IDENTIDAD Y ECUACION.

Se entiende por **igualdad**, a dos expresiones algebráicas que dan igual resultado para los mismos valores de sus letras.

Las igualdades pueden ser de dos tipos:

— **Identidades.** Son igualdades que admiten cualquier valor para sus letras.

Ej.: La expresión $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, es una identidad, ya que cualesquiera valores que demos a sus letras siempre se conserva la igualdad. Imaginemos que damos valores a sus letras $a = 5$ y $b = 3$:

$$(5 - 3)^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \Rightarrow 2 = 2$$

— **Ecuaciones.** Son igualdades que sólo admiten determinados valores para sus letras.

Ej.: La expresión $x + 1 = 3$, sólo admite el valor 2 para x, ya que para cualquier otro valor de x, la igualdad no se conserva.

Pues bien, cualquier igualdad, consta de dos miembros. A la expresión algebráica que se sitúa a la izquierda del signo igual, se le llama **primer miembro** y la expresión algebráica que se sitúa a la derecha del signo igual, la vamos a llamar **segundo miembro.**

$$1^{er.}\ \text{MIEMBRO} \quad = \quad 2.^{o}\ \text{MIEMBRO}$$

NOTA.—Entiéndase lo de primero y segundo miembro como una cuestión de convenio, ya que son conceptos relativos.

Es decir, que nos van a servir fundamentalmente para que nosotros nos entendamos en el momento de hablar o escribir y comprendamos la idea de como estamos actuando, ya que si los dos miembros de una igualdad los cambiamos por completo, ésta no experimenta alteración.

Así, en cualquier igualdad que sea ecuación podemos distinguir además los siguientes conceptos:

— **Incógnitas o letras desconocidas,** son las letras que sólo están determinadas para ciertos valores.

— **Soluciones, raíces o ceros,** son precisamente los valores únicos que pueden recibir las incógnitas y que sean motivo de cálculo.

Las soluciones de una ecuación participan de una característica necesaria y suficiente para que tales números sean soluciones:

Si cualquier valor obtenido como solución se sustituye en la ecuación o ecuaciones propuestas, debe verificar, satisfacer o dar el mismo valor numérico a los dos miembros de la ecuación.

— **El grado de una ecuación**, está indicado por el grado que tenga el polinomio de la ecuación.

2.—TRANSPOSICION DE TERMINOS. REGLAS

A rasgos generales, diremos que solucionar una ecuación, significa en cierto modo, **despejar** la incógnita.

Se entiende por despejar una incógnita, al hecho, de dejar a ésta totalmente aislada y con signo positivo en cualquiera de los miembros de la ecuación.

Evidentemente, a cualquier incógnita de cualquier ecuación, no le va a ocurrir que esté despejada de entrada. Pues bien, para despejar una incógnita va a ser necesario efectuar determinadas maniobras con los dos miembros de la ecuación, hasta despejarla, maniobras que consisten en transponer o transvasar términos de un miembro a otro.

Así pues, la transposición de términos se rige por las siguientes reglas:

— Cualquier término que esté en un miembro sumando, tiene aptitud para pasar al otro miembro restando, y viceversa.

Ej.: Obsérvese cómo en la ecuación $x + 7 = 10$, el 7 está en el primer miembro sumando. Si lo pasamos al segundo miembro, pasará restando $x = 10 - 7 \Rightarrow x = 3$.

— Cualquier término que esté en un miembro multiplicando tiene aptitud para pasar al otro miembro dividiendo y viceversa.

Ej.: Obsérvese cómo en la ecuación $3x = 6$, el 3 está multiplicando en el primer miembro a la x. Si lo pasamos al segundo miembro, pasará dividiendo $x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 3$.

— Se entiende por **ecuaciones equivalentes**, a aquellas que tienen las mismas soluciones.

Ej.: Son equivalentes las ecuaciones $x + 7 = 10$ y $3x = 6$ por tener la misma solución $x = 3$.

— Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación o igualdad por un mismo número distinto de cero, la ecuación no experimenta ningún tipo de alteración, en cuanto a sus soluciones. Es decir, que la nueva ecuación es equivalente con la antigua.

Ej.: Si la ecuación $x + 2 = 5$ la multiplicamos por 7 obtenemos una ecuación equivalente

$7x + 14 = 35$.

NOTA.—Hay veces que a dos miembros de una ecuación se les eleva a una potencia cualquiera o se les extrae una raíz de índice cualquiera. En estos casos es posible que la nueva ecuación obtenida no sea equivalente. Sin embargo hay veces que no hay más remedio que realizar este tipo de operaciones si queremos llegar a despejar la incógnita y nos conformaremos con las soluciones que obtengamos (es posible que una operación de ésas haga desaparecer soluciones «buenas» y se introduzcan soluciones «Extrañas» en la ecuación).

La cordillera pirenaica es frontera natural casi perfecta entre España y Francia.

El Pirineo no forma una cresta o sierra continua desde Irún hasta Port-Bou. El valle de Arán corta la cadena montañosa de tal manera que parece como si se hubiera producido allí una falla situada en el puerto de la Bonaigna.

Desde el monte Urtioga (Guipúzcoa) hasta Port-Bou (Gerona) hay una distancia en línea recta de unos 400 km., la frontera, en cambio, tiene unos 680 km. de longitud, la anchura varia de 50 a 150 km. y la superficie total es de unos 50.000 km^2.

La superficie del Pirineo Español es aproximadamente de dos veces y media mayor que la del Francés. Los cauces de los ríos son en algunos parajes sumamente estrechos formando cañones, hoces y desfiladeros.

Las alturas principales están en la zona española, el pico de Aneto con 3.404 m. es el más alto. Pero aunque el Pirineo español es más alto, la vertiente francesa tiene más generalizado el verdor, la zona nuestra es mas salvaje y fantástica.

Las especies vegetales que dominan la zona son: Haya, pino, roble, encina y castaño y en el monte bajo, el 8oj y la retama; los árboles desaparecen a alturas que varían entre 1.800 y 2.300 m.

El monje italiano Fra Lucas Pacciolo está considerado como el autor del primer tratado de contabilidad por el sistema denominado de partida doble. El principio básico de este sistema consiste en que todas las anotaciones producidas en la práctica comercial se escriben dos veces en los libros, una en el Debe y otra en el Haber.

Este sistema que se usa en la práctica comercial de todos los países, ya que se usaba en Génova en el año 1340 aunque sólo se tenga constancia escrita por medio del tratado que escribió Lucas Pacciolo en 1495.

En España se publicó por primera vez una Teneduría de Libros en 1590, escrita por Bartolomé Salvador de Solórzano.

— Si a los dos miembros de una ecuación los cambiamos de signo por completo, la ecuación obtenida siempre es equivalente. En realidad hemos estado multiplicando los dos miembros por -1.

Ej.: $2x + 3 = 5 \Rightarrow -2x - 3 = -5$

— Dos términos de una ecuación que estén en distinto miembro y con el mismo signo, se les puede suprimir, resultando otra ecuación equivalente.

Ej.: $6x + 5 = 7 + 5 \Rightarrow 6x = 7$

— Como regla práctica indicaremos que cuando queramos despejar una letra o incógnita de una ecuación, adoptaremos el criterio, de dejar en uno cualquiera de los miembros todos los términos que posean esa letra y los términos restantes los pasaremos al miembro contrario.

Ej.: Despejar p en la igualdad $p + 7q - 5 = 6$

$p + 7q - 5 = 6 \Rightarrow p = 6 - 7q + 5 \Rightarrow p = 11 - 7q$

Ej.: Despejar x en la ecuación $3x + 2x - 5 = 10 - x + 3$

Por ejemplo todo lo que tenga x lo ponemos en el primer miembro y lo que no tenga x en el segundo.

$3x + 2x - 5 = 10 - x + 3$

$3x + 2x + x = 10 + 3 + 5$

$6x = 18$

$$x = \frac{18}{6}$$

$x = 3$

Ej.: Despejar x en la igualdad $a\,x + 3 = px + 7$

Todo lo que tenga x lo pasamos al primer miembro y lo que no tenga x al segundo.

$ax + 3 = px + 7 \Rightarrow ax - px = 7 - 3 \Rightarrow ax - px = 4$

Y surge un pequeño problema. En estos casos para despejar x, la única forma es sacando factor común a la letra x.

$$x\,(a - p) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{a - p}$$

Ej.: Despejar a en la ecuación $3 + ap = q$

$$3 + a\,p = q \Rightarrow a\,p = q - 3 \Rightarrow a = \frac{q - 3}{p}$$

Ej.: Despejar x en la igualdad $x^3 = 7$

El exponente de la potencia, pasa a ser índice de un radical en el otro miembro.

$$x^3 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$$

Ej.: Despejar x en la igualdad $\sqrt{x} = 3$

El índice del radical pasa a ser exponente de una potencia en el otro miembro.

$$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9$$

Ej.: Despejar a en la igualdad: $(a + 1)^3 = p + 2$

$$(a + 1)^3 = p + 2 \Rightarrow a + 1 = \sqrt[3]{p + 2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{p + 2} - 1$$

Ej.:Despejar t en la igualdad $x = \sqrt[3]{\frac{(a+bt)^2}{p}}$

El problema es completo y complejo. Obsérvese detenidamente.

$$x = \sqrt[3]{\frac{(a + bt)^2}{p}} \Rightarrow x^3 = \frac{(a + bt)^2}{p} \Rightarrow x^3 p = (a + bt)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^3 p} = a + bt \Rightarrow \sqrt{x^3 p} - a = bt \Rightarrow \frac{\sqrt{x^3 p} - a}{b} = t.$$

Con lo que hemos llegado al final, únicamente podemos sacar fuera del radical $\sqrt{x^3 p}$ a parte de la x.

$$t = \frac{\sqrt{x^3 p} - a}{b} = \frac{x\sqrt{x p} - a}{b}$$

3.—ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.

Se llaman así a las ecuaciones, en las que el polinomio de la ecuación es de primer grado respecto a dicha letra o incógnita.

Para resolverlos, vamos a exponer el procedimiento de cálculo completo. Existirán ecuaciones en las que habrá que saltarse alguno de los «pasos» por ser innecesario dadas las características de la ecuación particular.

— **Eliminación de denominadores.** Si existen denominadores se eliminarán, aplicando el procedimiento del M.C.M. ya expuesto en el tema de fracciones. Es decir, se halla el M.C.M. de todos los denominadores y éste se divide entre cada denominador antiguo, multiplicando el resultado por su respectivo numerador (en las ecuaciones ya no es necesario poner el M.C.M. como denominador común, ya que no tiene ninguna repercusión en las soluciones, al contrario de lo que ocurría en las fracciones en donde era indispensable ponerle como denominador común).

— **Eliminación de paréntesis.** Si existen se operan para eliminarlos, teniendo buen cuidado de ir multiplicando los signos correspondientes.

— **Transposición de términos.** Se adopta el criterio de poner

Antiguamente, y en tiempos de Aristóteles, ya se hacían libros contables, llamados «efemérides», del griego efemeris (los escribimos con caracteres latinos y no griegos) que significa «diario». En ellos, los magistrados de Esparta y Atenas llevaban la contabilidad de los tributos, gastos públicos, etc.

Más adelante y en la Edad Media, los navegantes genoveses y los banqueros florentinos, perfeccionaron los métodos, llevando las últimas cifras de los libros diarios (de un mes) a otro libro donde existían las cifras de todos los meses con los gastos y los beneficios.

Este sistema se difundió tanto, que a Italia arribaron de toda Europa, comerciantes, para aprender el nuevo sistema de contabilidad.

A principios de este siglo aparecieron los primeros tratados y estudios de contabilidad con criterios más modernos y con un más riguroso control de las operaciones.

Este mismo sistema es el empleado en las sofisticadas máquinas de contabilidad que se está imponiendo hoy día.

todo lo que tenga incógnita en uno de los miembros y el resto se pasa al miembro contrario.

— **Reducción de términos semejantes.** Se suman algebráicamente los términos de uno y otro miembro.

— **Despeje de la incógnita.** Ha llegado el momento de despejar la incógnita. Es decir, de dejarla totalmente aislada y con signo positivo, en cualquiera de los dos miembros.

Ej.: Resolver la ecuación: $\frac{2x}{15} - \frac{3x-5}{20} = \frac{x}{5} - 3$

Si existe algún término de la ecuación que no tenga denominador (es el caso del 3) nos le fabricamos, poniéndole la unidad como tal. $\frac{2x}{15} - \frac{3x-5}{20} = \frac{x}{5} - \frac{3}{1}$

— **Eliminamos denominadores.** Para ello hallamos el M.C.M. $(15, 20, 5, 1)$ = M.C.M. $(3 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, 5, 1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ y dividimos el M.C.M. = 60 entre cada denominador antiguo, multiplicando el resultado por su respectivo numerador.

$$4 \cdot 2x - 3(3x - 5) = 12x - 60 \cdot 3$$

— **Eliminamos paréntesis.** Hay que tener cuidado con los signos.

$$8x - 9x + 15 = 12x - 180$$

— **Transponemos términos.** Por ejemplo adoptamos el criterio de poner lo que tenga x en el primer miembro y lo que no tenga x en el segundo miembro.

$$8x - 9x - 12x = -180 - 15$$

— **Reducimos términos semejantes.**

$$-13x = -195$$

— **Despejamos la incógnita.** Para ello se suele dividir toda la ecuación por el coeficiente que presenta la x.

$$\frac{-13x}{-13} = \frac{-195}{-13} \Rightarrow x = \frac{-195}{-13} \Rightarrow x = 15$$

Ej.: Resolver la ecuación: $\frac{3x+17}{8} - \frac{1-4x}{13} = \frac{1-x}{4} - \frac{9+x}{6}$

— **Eliminamos denominadores.**

M.C.M. $(8, 13, 4, 6)$ = M.C.M. $(2^3, 13, 2^2, 2 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 = 312$

$$39(3x + 17) - 24(1 - 4x) = 78(1 - x) - 52(9 + x)$$

— **Eliminamos paréntesis.**

$$117x + 663 - 24 + 96x = 78 - 78x - 468 - 52x$$

— **Transponemos términos.**

$$117x + 96x + 78x + 52x = 78 - 468 + 24 - 663$$

Estudiando las biografías de los grandes cerebros de la humanidad tanto hombres como mujeres, matemáticos y personas dedicadas al cultivo de las ciencias y artes en general, se observa que en la mayoría de los casos su vida se divide en dos partes bien definidas, una primera generalmente su juventud, dedicada a aprender, a inventar y desarrollar sus ideas ampliando sus conocimientos todo lo posible.

Pasando posteriormente a la segunda, que generalmente les entra un anhelo incontenible de enseñar toda su ciencia a las generaciones venideras.

Quizás sea el miedo a que sus estudios y descubrimientos se pierdan o el innato deseo que todo hombre lleva dentro de sí, de ser un eslabón en la cadena de transmisión del saber y que a escala familiar mueve a todos los padres a tratar de transmitir a sus hijos sus conocimientos poniendo todos los medios a su alcance para conseguir en muchos casos que su hijo pueda llegar a donde no llegó él.

Reducimos términos semejantes:

$343x = 1.029$

Despejamos la incógnita.

$$\frac{343x}{343} = \frac{-1029}{343} \Rightarrow x = \frac{-1029}{343} \Rightarrow x = -3$$

Ej.: Resolver la ecuación: $\frac{x}{3} - \frac{2(x-5)}{4} = 6 + \frac{x-1}{2}$

Nos fabricamos el denominador del 6, poniéndole la unidad como tal. $\frac{x}{3} - \frac{2(x-5)}{4} = \frac{6}{1} + \frac{x-1}{2}$

— Eliminamos denominadores.

M.C.M. $(3, 4, 1, 2) =$ M.C.M. $(3, 2^2, 1, 2) = 2^2 \cdot 3 = 12$

$4x - 3 \cdot 2(x-5) = 12 \cdot 6 + 6(x-1)$

— Eliminamos paréntesis.

$4x - 6x + 30 = 72 + 6x - 6$

— Transponemos términos.

$4x - 6x - 6x = 72 - 6 - 30$

Reducimos términos semejantes.

$-8x = 36$

— Despejamos la incógnita.

$$\frac{-8x}{-8} = \frac{36}{-8} \Rightarrow x = -\frac{36}{8} \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$$

Ej.: Resolver la ecuación: $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{x-6}{x^2-1}$

Aunque esta ecuación inicialmente no es de primer grado, el método operativo general, permite reducirla a una de primer grado.

— Eliminamos denominadores.

M.C.M. $(x+1, x-1, x^2-1)$ M.C.M. $[x+1, x-1, (x+1)(x-1)] = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

$2(x-1) - 3(x+1) = x - 6$

— Eliminamos paréntesis.

$2x - 2 - 3x - 3 = x - 6$

— Transponemos términos.

$2x - 3x - x = -6 + 3 + 2$

— Reducimos términos semejantes.

$-2x = -1$

Felipe V, decidido a emprender una política mercantilista, promovió la creación de fábricas de vidrio, de tapices y de muebles de calidad en Madrid, de paños y tejidos finos en Segovia y Guadalajara, de algodón en Avila, y fundiciones de latón en Alcázar. Todo ello con el fin de surtir al mercado español de productos fabricados en el país.

Introdujo una reglamentación para el trabajo en los telares de lana, cáñamo, hilo y seda, fomentando el empleo de la materia prima nacional. Disolvió los antiguos gremios e instituyó la libertad del trabajo. A fin de estimular el comercio con las colonias fueron autorizados los particulares de nacionalidad española a comerciar con barcos propios previa licencia. Se concedió libertad para traer jabón y asfalto e importar seda. Fue una reforma de considerable alcance que afectó beneficiosamente a Cataluña, Asturias y a las provincias Vascas.

El puerto de Barcelona centralizó pronto el tráfico marítimo de España con América y con los países del Mediterráneo, las importaciones de algodón hicieron nacer en Cataluña las fábricas de hilados, que a fines del siglo XVIII empleaban ya unos 80.000 obreros, junto a las industrias del cuero, aguardiente y armas.

Vamos a demostrar matemáticamente que 1 = 2. Las operaciones que vamos a realizar a continuación, damos fe que todas están perfectamente realizadas. No habrá trucos de ninguna clase respecto a las operaciones. Este problema lo hemos planteado a multitud de profesores y todavía no hemos encontrado ni uno solo que nos diera la solución y cuando nosotros se la dábamos entonces soltaban la carcajada, porque ellos influenciados por nosotros sólo se fijaban en que las operaciones estuvieran bien hechas. Es como el prestidigitador que muestra la mano derecha al público, mientras con la izquierda realiza el prodigio. Veamos

a = b (la llamaremos igualdad n.º 1)

A toda igualdad la multiplicamos por el mismo número la igualdad no varía, multipliquemos por «a» $a \cdot a = b \cdot a$; o lo que es igual $a^2 = b \cdot a$

Si a esta igualdad ($a^2 = b \cdot a$) le restamos el mismo número, la igualdad subsiste, restémosle «b^2» entonces tendremos.

$a^2 - b^2 = b \cdot a - b^2$

(Continúa en la página siguiente)

— Despejamos la incógnita.

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow x = \frac{-1}{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ej.: Resolver la ecuación: $\frac{5a - x}{2} - \frac{x + 3}{6} = \frac{9 - x}{4} - \frac{bx + 2}{16}$

cuando a = 1 y b = 6

Antes de comenzar a resolverla, sustituimos los valores de a y de b en la ecuación propuesta.

$$\frac{5 \cdot 1 - x}{2} - \frac{x + 3}{6} = \frac{9 - x}{4} - \frac{6 \cdot x + 2}{16}$$

Obteniendo:

$$\frac{5 - x}{2} - \frac{x + 3}{6} = \frac{9 - x}{4} - \frac{6x + 2}{16}$$

y procedemos a resolverla.

— Eliminamos denominadores.

M.C.M. $(2, 6, 4, 16)$ = M.C.M. $(2, 2 \cdot 3, 2^2, 2^4) = 2^4 \cdot 3 = 48$

$$24(5 - x) - 8(x + 3) = 12(9 - x) - 3(6x + 2)$$

— Eliminamos parentesis.

$$120 - 24x - 8x - 24 = 108 - 12x - 18x - 6$$

— Transponemos términos

$$-24x - 8x + 12x + 18x = 108 - 6 + 24 - 120$$

— Reducimos términos semejantes.

$$-2x = 6$$

— Despejamos la incógnita. $\frac{-2x}{-2} = \frac{6}{-2} \Rightarrow x = -3$

4.—SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO O LINEALES.

Anteriormente hemos visto cómo se resuelve una ecuación de primer grado (el polinomio de la ecuación debe ser de grado 1) con una incógnita. Ahora vamos a ampliar la cantidad de ecuaciones pero también vamos a ampliar la cantidad de incógnitas. Es decir, que desde nuestro punto de vista para que un sistema se pueda resolver deben existir el **mismo número de ecuaciones que de incógnitas** (en temas bastante posteriores generalizaremos el criterio a más ecuaciones que incógnitas o menos ecuaciones que incógnitas) y en nuestro caso concreto todas las ecuaciones deben ser de primer grado (el polinomio de cada ecuación debe ser de grado 1).

De esta forma podemos hacer las siguientes consideraciones:

— Cuando existe un cierto número de ecuaciones, con un cierto número de incógnitas, se dice que el conjunto de todas, forman un **sistema de ecuaciones**

— Resolver un sistema de ecuaciones, significa localizar unos valores determinados para las incógnitas que verifiquen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

— Para resolver los sistemas de ecuaciones, existen varios procedimientos que se exponen a continuación, y que en definitiva, su objetivo está dirigido, a lograr reducir el sistema de primer grado de varias ecuaciones con varias incognitas a una ecuación de primer grado con una incógnita.

Inicialmente se van a exponer los métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero advirtiendo que se pueden generalizar para más ecuaciones e incógnitas.

A.— Método de sustitución.

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir ésta en la otra ecuación del sistema.

Ej.: Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$

Por ejemplo de la primera ecuación del sistema, despejamos la x y la sustituimos en la segunda ecuación del sistema, obteniendo como consecuencia una ecuación de primer grado con una incógnita.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3 - y$$

$$(3 - y) + 2y = 4$$

$$3 - y + 2y = 4$$

$$- y + 2y = 4 - 3$$

$$y = 1$$

$$x = 3 - 1 \; ; \; x = 2$$

Una vez obtenida una de las incógnitas, la otra se puede obtener, sustituyendo la obtenida y en la expresión en la que hemos despejado la x, o en cualquiera de las ecuaciones primitivas del sistema.

B.— Método de igualación.

Consiste en despejar de las dos ecuaciones del sistema la misma incógnita e igualar las dos expresiones obtenidas.

Ej.: Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$

Por ejemplo, despejamos de las dos ecuaciones la x e igualamos las dos expresiones obtenidas, resultando una ecuación de primer grado con una incógnita.

conociendo un poquito de matemáticas se sabe que diferencia de cuadrados es igual que suma por diferencia, o sea que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (Si no te lo crees, haz la prueba)
Tendremos que: $(a + b)(a - b) = b \cdot a - b^2$
El segundo término de esta igualdad $(b \cdot a - b^2)$
sacamos b factor común y tendremos $b(a - b)$ y así resultará que: $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ (Le llamaremos igualdad número 2)

Bien, si a toda igualdad la dividimos por el mismo número, tampoco la igualdad variará. Vamos a dividirla por $(a - b)$ y así tendremos.

$$\frac{(a \cdot b)(a - b)}{(a - b)} = \frac{b(a - b)}{(a - b)}$$

$(a - b)$ que multiplica y $(a - b)$ que divide, por supuesto se anulan o sea

$$\frac{(a \cdot b)(\cancel{a - b})}{(\cancel{a - b})} = \frac{b(\cancel{a - b})}{(\cancel{a - b})}$$

y nos queda que: $a + b = b$ Así viendo, al principio, en la primera igualdad $a = b$ (o lo que seria lo mismo $1 = 1$)
Al sumar $a + b$ ó $1 + 1$ ó sea 2 tendríamos entonces que

$$2 = 1$$

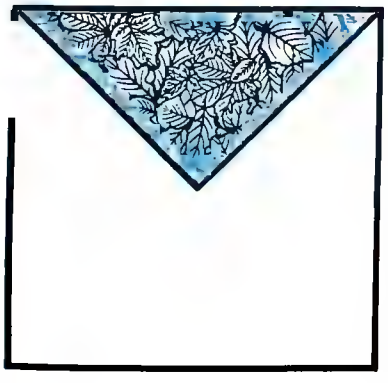
SOLUCION

Todas estas operaciones están perfectamente bien realizadas y al mismo tiempo demostramos la perfección de un teorema enunciado.

No se rían mucho al no darse cuenta de donde está el quid de la cuestión.

Veamos: En la igualdad n.° 2 ¿Qué es $a - b$? ¡¡¡es cero!!! se estableció en la igualdad n° 1. Entonces si $a - b = 0$, hemos estado dividiendo por CERO y todo número dividido por CERO, es CERO.

En un pueblo de Castilla donde todavía siguen dividiendo la tierra entre los herederos al morir el propietario, se dio el caso de que falleció un señor dueño de un campo cuadrado, del que por necesidad había vendido la cuarta parte de su superficie según se indica en el dibujo adjunto.



Sus cuatro hijos heredaron la finca y decidieron dividirla con la condición de que todos recibieran la misma superficie, y también que tuviesen la misma forma. ¿Cómo podían hacerlo?

LA SOLUCION EN (pág. 304).

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x = 3 - y \\ \Rightarrow x = 4 - 2y \end{array} \longrightarrow x = 3 - 1 \; ; \; (x = 2)$$

$$3 - y = 4 - 2y$$

$$-y + 2y = 4 - 3$$

$$(y = 1)$$

Una vez obtenida una de las incógnitas, la otra se puede obtener sustituyendo la y en cualquiera de las expresiones donde hemos despejado la x, o en cualquiera de las expresiones del sistema.

C.— Método de reducción.

Consiste en eliminar una de las incógnitas del sistema, mediante la suma de las dos ecuaciones de éste, miembro a miembro. Realizada esta operación se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita.

Normalmente este método exige una preparación previa de las ecuaciones del sistema:

— Si la incógnita que queremos eliminar tiene en las dos ecuaciones el mismo coeficiente en valor absoluto y con signo distinto, simplemente con sumar las dos ecuaciones se elimina una incógnita.

Ej.: Eliminar y en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 3y = 8 \end{array}\right\}$$

$$6x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

— Si la incógnita que queremos eliminar tiene en las dos ecuaciones el mismo coeficiente en valor absoluto y signo, antes de sumar miembro a miembro tenemos que cambiar de signo (o multiplicar por -1) a cualquiera de las ecuaciones.

Ej.: Eliminar x en el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 5x + y = 6 \\ 5x + 3y = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (-1) \quad -5x - y = -6 \\ \qquad\quad 5x + 3y = 7 \end{array}$$

$$2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

— Si la incógnita que queremos eliminar tiene en las dos ecuaciones distintos coeficientes y cualesquiera signos, para hacer iguales los coeficientes, se suele multiplicar en la primera ecuación por el coeficiente que presenta la incógnita a eliminar en la segunda ecuación y la segunda ecuación se multiplica por el coeficiente que presenta la incógnita a eliminar en la primera ecuación, teniendo en cuenta que siempre deben aparecer signos contrarios delante de la incógnita a eliminar, en las dos ecuaciones.

Cuando un coeficiente en una incógnita a eliminar sea múltiplo del coeficiente de la misma incógnita de la otra ecuación, bastará para hacerlas iguales con multiplicar una de las ecuaciones por un número conveniente.

Ej.: Eliminar x en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -2) \\ 3) \end{array} \left.\begin{array}{r} -6x + 2y = -10 \\ 6x + 9y = 12 \end{array}\right\}$$

$$11y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{11}$$

Ej.: Eliminar y en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 3x - 10y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 5) \left.\begin{array}{r} 5x + 10y = 15 \\ 3x - 10y = 6 \end{array}\right\}$$

$$8x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{8}$$

Ej.: Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$

Eliminamos x y obtenemos y.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -1) \left.\begin{array}{r} -x - y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$$

$$y = 1 \Rightarrow y = 1$$

Aunque ya no hace falta continuar aplicando el método (sabiendo el valor de una incógnita y sustituyéndola en cualquier ecuación del sistema obtenemos la otra), vamos a seguir aplicándolo para obtener la otra incógnita.

Eliminamos y y obtenemos x.

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \quad -2) \left.\begin{array}{r} -2x - 2y = -6 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$$

$$-x = -2 \Rightarrow x = 2$$

D.— Coordenadas Cartesianas o rectangulares.

Se llama así a un sistema de referencia, dotado para representar puntos, líneas o figuras geométricas en el plano. Sistema que en la teoría de conjuntos utilizábamos abstractamente para representar pares y productos cartesianos de conjuntos.

Básicamente consiste en lo siguiente:

— Dos rectas o ejes que se cortan perpendicularmente forman el esqueleto fundamental del sistema de referencia, y reciben el nombre de **ejes coordenados.**

El punto de intersección de los dos ejes recibe el nombre de **origen de coordenadas.**

Al eje horizontal se le denomina **eje de abcisas** y al eje vertical, se le llama **eje de ordenadas.**

De tal forma que el eje horizontal o de abcisas se considera positivo del origen hacia la derecha y negativo del origen hacia la izquierda.

COCINERO... INCULTO

Nueve amigos Universitarios, para celebrar el fin de curso, se reunieron una noche a cenar en un restaurante, que ya conocían y cuyo propietario se prestaba a las chanzas y bromas de los estudiantes, cultos y educados junto con la... incultura del dueño que para sumar dos y dos, sacaba el lápiz. Mientras discutían la forma de sentarse a la mesa, (unos decían que por edad, otros con arreglo a las notas) tuvo que intervenir el propietario a poner paz y a procurar dar la solución.

¿Por qué no se sientan hoy de una manera, mañana de otra distinta, pasado mañana de otra y así no hay discusiones ya que Vds. acostumbran a venir aquí a almorzar y cenar todos los días? Además, cuando llegue el momento en que todos los puestos se repitan a partir de entonces... yo les invito a todos a comer gratis, siempre que quieran. Después de la juerga a costa del propietario del restaurante y de aceptar solemnemente la propuesta, a uno de los estudiantes se le ocurrió hacer las combinaciones: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362.880$ formas de sentarse. Al ser dos comidas al día serían 181.440 días, o sea... 497 años. A partir de entonces... el dueño del restaurante... les invitaba.

MORALEJA: No os fieis nunca de los incultos o los que se tienen por eso.

El teléfono, aparato imprescindible hoy día, sólo tiene algo más de cien años de vida; al principio no pasó de ser una curiosidad empleada solo por algunas empresas importantes, ya que nada más unía entre sí una decena de capitales españolas.

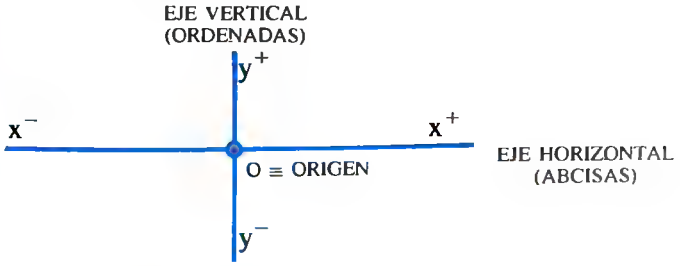
En 1907 se contaba en España con 18.723 teléfonos en servicio.

Los antecedentes de este aparato se remontan a la segunda mitad del siglo XVII.

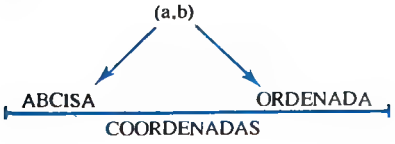
Muchos y variados intentos se irán acercándose a la solución final. En 1796, el alemán G. Huth aconsejó la palabra «teléfono» derivada del griego, y que dio el nombre utilizado universalmente con pequeñas variaciones.

Phillipp Reis efectúa en Alemania, en 1863, las primeras transmisiones rudimentarias del sonido mediante la corriente eléctrica. Pero fue Alexander Graham Bell, profesor de Fisiología vocal de la Universidad de Boston, el primero en patentar un sistema para hablar a distancia. Era el mes de marzo de 1876 y había nacido el teléfono.

El eje vertical o de ordenadas es positivo del origen hacia arriba y negativo del origen hacia abajo.



— Cualquier punto que haya de situarse en los ejes coordenados debe expresarse de la forma (a,b) en donde el primer elemento corresponde siempre a un valor de abcisa y el segundo a un valor de ordenada.

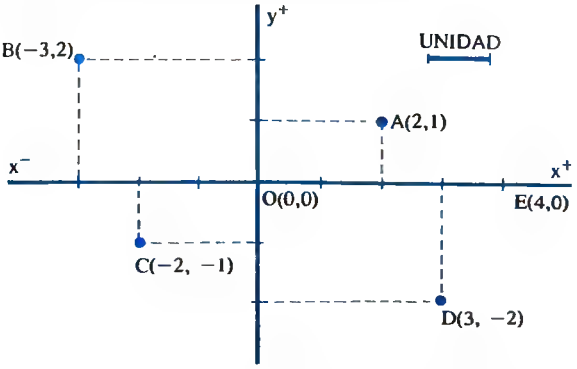


Para representar estos puntos se elige una unidad cualquiera, que debe mantenerse igual en todo el dibujo. Cuanto más grande se elija la unidad más grande se reproducirá el dibujo.

Para representar un punto, se llevan sobre el eje horizontal, las unidades que indique la abcisa de éste, en sentido positivo o negativo del eje según se indique. A continuación llevamos las ordenadas sobre el eje vertical, también en sentido positivo o negativo del eje según se indique.

El punto de intersección de las perpendiculares trazadas a los ejes por estos puntos de abcisa y ordenada, es la representación gráfica del punto en cuestión.

Ej.: Representar los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares: A(2,1), B(− 3,2), C(− 2, − 1), D(3, − 2), E(4,0), 0(0,0)



— También podemos representar rectas en un sistema rectangular.

Antes debemos saber que una recta gráficamente viene expresada analítica o matemáticamente por un polinomio de primer grado con dos incógnitas o letras (refiriéndose por supuesto a la representación plana = dos dimensiones)

Ej.: Son rectas en el plano las ecuaciones:
$3x - 2y = 5$; $7x - 5 = 0$; $y = 6$

Pues bien, siempre que queramos representar una recta, es suficiente para ello, el tener dos puntos cualquiera de la recta en cuestión. (Por dos puntos pasa una sola recta)

Cualquier punto de una recta se puede obtener fácilmente, dando un valor cualquiera a una de las letras de la ecuación representativa de la recta y obteniendo el valor de la otra letra por la relacción que indique la ecuación, obteniendo así un valor de x (abcisa) y un valor de y (Ordenada), que definen un punto de la recta en cuestión.

Ej.: Dibujar la recta $x + y = 4$.

Por ejemplo damos a x el valor de 1, así que el valor de y es:

$1 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 1 \Rightarrow y = 3$

Con lo que tenemos un punto de la recta, colocando primero el valor de x y luego el de y: (1,3)

Vamos a obtener otro punto, necesario para dibujar la recta.

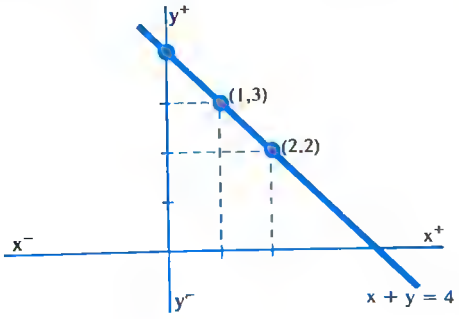
Por ejemplo damos a x el valor 2, así que el valor correspondiente de y es: $2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2 \Rightarrow y = 2$

Con lo que tenemos otro punto de la recta: (2,2)

Esto se suele hacer generalmente, en lo que se llama una tabla de valores, de forma esquemática.

$x + y = 4$

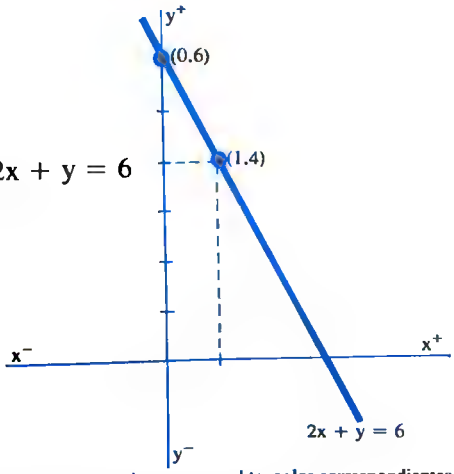
x	y	
1	3	$\Rightarrow$ (1,3)
2	2	$\Rightarrow$ (2,2)



Ej.: Dibujar la recta $2x + y = 6$

$2x + y = 6$

x	y	
0	6	$\Rightarrow$ (0,6)
1	4	$\Rightarrow$ (1,4)



NOTA.—Lo mismo que se le dan valores cualquiera a x para obtener los correspondientes de y, se le pueden dar valores a y para obtener los correspondientes de x.

Al año de su invención, poco tiempo después de haber sido presentado en Filadelfia en la Exposición del Centenario, aparece el teléfono en España. En octubre de 1877 se efectúa un ensayo en La Habana, entre el cuartel de bomberos y el domicilio de un señor apellidado Muset. En la península tras unas pruebas llevadas a cabo entre aulas distantes de la Escuela Industrial de Barcelona, la casa «Dalmau e Hijo», bajo la dirección técnica del Ingeniero Industrial Narciso Xifra Dalmau, establecía en diciembre de 1877 la primera conferencia de larga distancia entre Barcelona y Gerona mediante el alambre directo que unía las estaciones de las mencionadas ciudades catalanas. Días más tarde, se realizaban unos ensayos entre el Castillo de Montjuich y la Ciudadela, sobre una línea del ejército que pasaba por Capitanía y el Gobierno Militar de la Plaza. En Madrid comenzaron a realizarse experiencias a primeros de enero de 1878, entre la Central de Telégrafos y el Ministerio de Guerra, así como algunas localidades cercanas. Ese mismo mes, Doña Mercedes de Orleáns habla desde Aranjuez con su prometido, el Rev Don Alfonso XII.

El jinete sobre su caballo, cuyas carnes y músculos desaparecieron hac- más de un siglo continúa su galope a través de la eternidad. Este caballero de la muerte que contemplan todos los días gentes maravilladas a través del vidrio de un extraordinario ataúd era antaño una hermosísima mujer que asaltada por una fulminante dolencia murió en brazos de su novio. Este, llamado Fragonard era sobrino del célebre pintor de igual nombre. Se dedicaba a una ciencia aún no muy conocida y desarrollada, la veterinaria. Fue colaborador del famoso tocólogo Orfila. Cuando la novia falleció no quiso que se esfumara en la nada. Disecó el cuerpo de la joven y el de un caballo y compuso con los dos una verdadera estatua ecuestre. Extraña y terrorífica idea de un hombre loco de dolor.

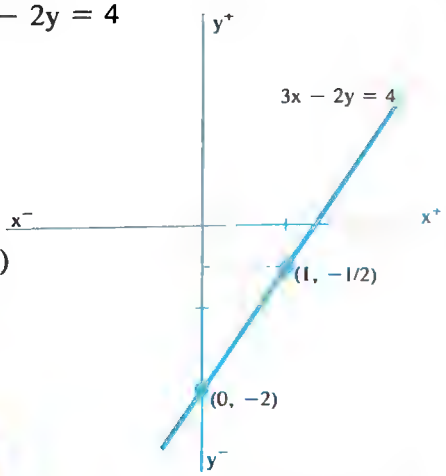
El «caballero de Fragonard» resiste al tiempo como si fuera de bronce. Los huesos, los músculos y lo que quedó después de la disecación se conserva sin la menor alteración. Ningún científico ha descubierto el secreto de Fragonard; ningún proceso conocido permite semejante operación anatómica.

Este «Caballero de Fragonard» que fue durante largo tiempo la principal atracción del famoso «gabinete» del Instituto de Veterinaria de Alfort se encuentra desde 1937 en la vitrina del palacio de la Descubierta de París, Expuesto a la admiración de los visitantes.

Ej.: Dibujar la recta $3x - 2y = 4$

$3x - 2y = 4$

x	y	
0	− 2	⇒ (0, − 2)
1	− 1/2	⇒ (1, − 1/2)



E.—Metodo Gráfico.

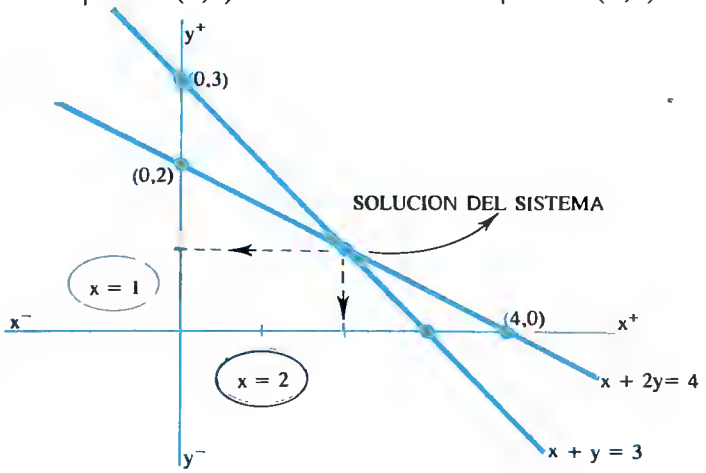
Consiste en representar gráficamente, cada una de las rectas que forman el sistema de ecuaciones.

La solución del sistema, es la intersección de ambas rectas, ya que debe ser un punto que pertenezca a las dos simultáneamente.

Ej.: Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$

x	y	
0	3	⇒ (0,3)
3	0	⇒ (3,0)

x	y	
0	2	⇒ (0,2)
4	0	⇒ (4,0)



Ej.: Resolver por todos los métodos el sistema

$\left.\begin{array}{rl} x - 2y = & -10 \\ 3x + 5y = & 3 \end{array}\right\}$

— Método de sustitución:

$\left.\begin{array}{rl} x - 2y = & -10 \\ 3x + 5y = & 3 \end{array}\right\}$ → $x = 2y - 10$

$3\,(2y - 10) + 5y = 3$

$6y - 30 + 5y = 3$

$11y = 33$

$y = \frac{33}{11}$ → $y = 3$

$x = 2 \cdot 3\ 10 = -4$

$x = -4$

— **Método de igualación**

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -10 \\ 3x + 5y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 2y - 10 \rightarrow x = 2\cdot 3 - 10 \; ; \; x = -4 \\ \rightarrow x = \dfrac{3 - 5y}{3} \end{array}$$

$$2y - 10 = \frac{3 - 5y}{3}$$

$$6y - 30 = 3 - 5y$$

$$6y + 5y = 3 + 30$$

$$11y = 33 \rightarrow y = \frac{33}{11} \rightarrow y = 3$$

— **Metodo de reducción**

$$\left.\begin{array}{r} -3x + 6y = 30 \\ 3x + 5y = 3 \end{array}\right\} \text{Eliminación de x}$$

(−3)

$$11y = 33 \rightarrow y = \frac{33}{11} = 3 \; ; \; y = 3$$

$$\begin{array}{l} x - 2y = -10 \\ 3x + 5y = 3 \end{array}$$

(5)

(2)

$$\left.\begin{array}{r} 5x - 10y = -50 \\ 6x + 10y = 6 \end{array}\right\} \text{Eliminación de y}$$

$$11x = -44 \rightarrow x = \frac{-44}{11} = -4 \; ; \; x = -4$$

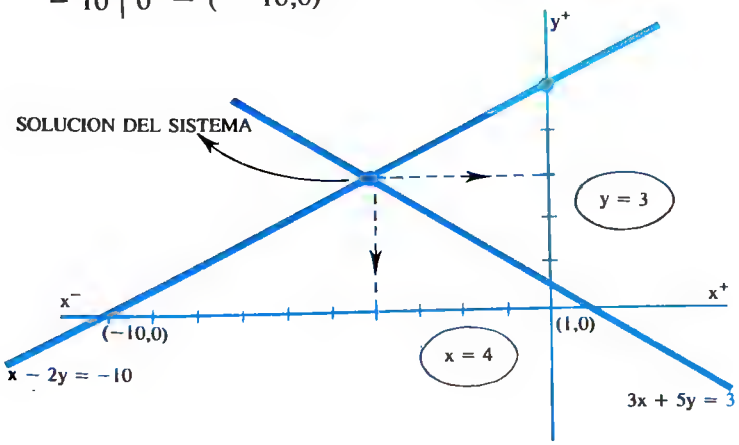
— **Método gráfico:**

$x - 2y = -10$

x	y	
0	5	⇒ (0,5)
−10	0	⇒ (−10,0)

$3x + 5y = 3$

x	y	
0	3/5	⇒ (0,3/5)
1	0	⇒ (1,0)



Ej.: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{3x + 2y} = 1 \\ \dfrac{1}{3y - 2x} = -\dfrac{1}{7} \end{array}\right\}$$

El nacimiento de Miguel de Cervantes Saavedra en Alcalá de Henares dio celebridad y renombre universal a esta ciudad; esta población castellana cuenta además con una historia milenaria, los restos arqueológicos hallados en las afueras del núcleo urbano actual se remontan el período Paleolítico; en la época romana se llamó Complutum, nombre del que procede el patronímico de la ciudad. Los numerosos mosaicos romanos constituyen la mejor muestra de este género en Castilla.

Los árabes fundaron una fortaleza a la que llamaron Alcalá Nahar de donde deriva su nombre actual. Después de muchos hechos históricos vividos por la ciudad, sin duda el más destacado culturalmente es la fundación por el Cardenal Cisneros de la Universidad Complutense que con el Colegio Mayor de San Ildefonso y los siete colegios menores que llegó a tener, convirtieron a Alcalá en el gran foco cultural renacentista.

En la actualidad y pese al traslado a Madrid en 1936 de su Universidad, sigue teniendo gran empuje intelectual la Facultad de Ciencias Económicas, tiene su sede en el antiguo convento de los Animos, construido en el año 1578.

Solución al problema de «la lógica», de la pág. 267

En primer lugar (y por lógica) siempre ajusta mejor una mesa de tres patas en cualquier superficie o terreno, por muy malo que esté; la prueba está demostrada en que todos los instrumentos que se utilizan en terrenos no perfectamente planos tienen tres patas (instrumentos agrimensores, trípodes de cámaras fotográficas, etc.).

En segundo lugar, por deducciones geométricas ya que «por tres puntos en el espacio, pasa un plano y solamente uno».

¿Quién no ha tenido alguna vez que «calzar» una mesa de cuatro patas?

Solución al problema del reloj de la pág. 270

La circunferencia tiene 360°. Si el reloj marcara las 6 en punto, sería el ángulo de 180°, o sea, la mitad.

$(360° \times \frac{6}{12} = 360° \times \frac{1}{2} = 180°)$

Al marcar las 8 en punto, entonces el angulo sería de

$360° \times \frac{8}{12} = 360° = \frac{2}{3} = \frac{720}{3} = 240°$

Primeramente vamos a eliminar denominadores de cada ecuación del sistema.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{3x+2y} = 1 \quad \Rightarrow 1 = 3x + 2y \\ \dfrac{1}{3y-2x} = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow 7 = -3y + 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo vamos a utilizar el método de sustitución.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1-2y}{3} \rightarrow x = \frac{1 - 2\left(-\frac{19}{13}\right)}{3} =$$

$$= \frac{1 + \frac{38}{13}}{3} = \frac{\frac{51}{13}}{3} = \frac{51}{39} = \frac{17}{13} \; ; \; \boxed{x = \frac{17}{13}}$$

$$2\frac{1-2y}{3} - 3y = 7$$

$$\frac{2-4y}{3} - 3y = 7$$

$$2 - 4y - 9y = 21$$

$$-13y = 19 \rightarrow \boxed{y = -\frac{19}{13}}$$

Ej.: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2y - \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{1+x}{6} \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$

Primeramente vamos a poner en orden la primera ecuación del sistema, eliminando denominadores.

$$2y - \frac{x-y}{3} = \frac{1+x}{6} \Rightarrow 12y - 2(x-y) = 1 + x$$

$$12y - 2x + 2y = 1 + x \Rightarrow 12y + 2y - 2x - x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 14y = 1$$

Así que el sistema lo tenemos preparado de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} -3x + 14y = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 - y \rightarrow x = 1 - \frac{4}{17} =$$

$$= \frac{17-4}{17} = \frac{13}{17} \Rightarrow \boxed{x = \frac{13}{17}}$$

Sustituyendo la incógnita despejada en la primera ecuación:

$$-3(1-y) + 14y = 1 \Rightarrow -3 + 3y + 14y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17y = 4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{17}}$$

F.—Sistemas de más de dos ecuaciones e incógnitas.

Obsérvese que en los sistemas de ecuaciones anteriores, mediante los métodos indicados, los reducíamos a una ecuación con una incógnita.

Pues bien, cuando el sistema aumenta a más de dos, las ecuaciones y las incógnitas, habrá que reducirlo a uno de dos ecuaciones y dos incógnitas, procediendo a continuación como ya se ha indicado.

En general el método más adecuado suele ser el de reducción, si bien, existen sistemas que por sus características particulares, requieren mejor la aplicación de otro método.

Si el sistema es de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuando apliquemos el método de reducción elegiremos dos ecuaciones cualquiera del sistema y eliminaremos entre las dos, una incógnita cualquiera. A continuación elegiremos otras dos nuevas ecuaciones y eliminaremos también la misma incógnita de antes, reduciendo el sistema a dos ecuaciones con dos incógnitas.

NOTA.—Como se observa, el método de reducción consiste en ir «bajando escalones» hasta reducir el sistema primitivo a una ecuación con una incógnita.

Ej.: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x + y + z = & 6 \\ x - 2y - z = & -6 \\ 2x + y - 3z = & -5 \end{array}\right\}$$

Elegimos por ejemplo las dos primeras ecuaciones y adoptamos el criterio de eliminar z entre ellas.

$$\begin{array}{rrrr} x + y + z = & 6 \\ x - 2y - z = & -6 \\ \hline 2x - y = & 0 \end{array}$$

A continuación elegimos la primera y la tercera y eliminamos también z entre ellas.

$$\left.\begin{array}{rrrr} x + y + z = & 6 \\ 2x + y - 3z = & -5 \end{array}\right\} \begin{array}{rrrr} 3x + 3y + 3z = & 18 \\ 2x + y - 3z = & -5 \\ \hline 5x + 4y = & 13 \end{array}$$

Con lo que conseguimos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que vamos a resolver, por ejemplo, por sustitución.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 5x + 4y = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 2x \\ \rightarrow 5x + 4 \cdot 2x = 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5x + 8x = 13 \\ 13x = 13 \Rightarrow x = \dfrac{13}{13} = 1 \end{array}$$

$y = 2 \cdot 1$; $y = 2$

$x = 1$

La encuadernación de los libros ha variado con el paso del tiempo; hoy los libros se fabrican como cualquier otro producto industrial, veloces máquinas los imprimen y así mismo los encuadernan.

Todavía existen artesanos quizá en trance de desaparecer que siguen, en sus antiguos talleres, y con útiles casi medievales haciendo primorosas obras de arte, utilizando materiales muy caros, de gran calidad, pieles finas, oro en delgadísimas láminas y algunas veces piedras preciosas, terciopelos y sedas lujosísimas.

En la antigüedad se constituyeron gremios artesanos de encuadernadores que realizaron bellísimos ejemplares que son cotizadísimos en el mundo de los bibliófilos y que podemos contemplar llenos de admiración en las catedrales, universidades y en las más famosas bibliotecas mundiales. La encuadernación es el vestido exterior que en muchos casos da valor a los ejemplares que por otra parte no lo tendría. Si bien hoy no se usan estas encuadernaciones tan lujosas nada más que en los protocolos y documentos oficiales, si es cierto que las editoriales cuidan mucho la presencia y la calidad de sus productos ya que el libro en principio entra por los ojos.

Antiguamente, Jamaica, tenia el problema de que sus habitantes eran atacados por serpientes venenosas. Por muchos intentos que se hicieron para exterminarlas, fueron vanos, hasta que decidieron llevar a la isla al pájaro *serpentario*, enemigo de dichas serpientes. Tiempo después los exterminó. Pero, sin embargo, las ratas de campo, se multiplicaron extraordinariamente al no tener quien las exterminara, (la serpiente) hasta tal punto que las plantaciones de caña de azúcar sufrieron enormes destrozos. Se llevó entonces a la isla el *mungo-indio* enemigo de las ratas. Estos animales se adaptaron perfectamente al ambiente de la isla y en diez años desaparecieron las ratas... pero el mungo al faltarle las ratas, buscaron otros animales con que alimentarse, devorando aves, cabras, cerdos, etc... Después siguieron con las plantaciones. Hasta que por fin se creó una ley de exterminio de este animalito por medio de venenos, trampas etc... hasta limitar su multiplicación.

Para obtener la z vamos a cualquier ecuación del sistema primitivo y sustituimos x e y. Por ejemplo en la primera ecuación del sistema.

$$x + y + z = 6 \Rightarrow 1 + 2 + z = 6 \Rightarrow \boxed{z = 3}$$

Ej.: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ x - 2z = 2 \\ x + 2y = -4 \end{array}\right\}$$

Como dos de las ecuaciones del sistema no contienen a las tres incógnitas de éste, vamos a resolverle por sustitución (en estos casos suele ser adecuado), aunque también se podría resolver por reducción. Para ello despejaremos dos incógnitas en función de una tercera común.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ x - 2z = 2 \\ x + 2y = -4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow z = \dfrac{x - 2}{2} \\ \rightarrow y = \dfrac{-4 - x}{2} \end{array}$$

y las sustituimos en la primera ecuación del sistema que es la completa en cuanto a que posee las tres incógnitas.

$$x + y + z = -1 \Rightarrow x + \frac{-4 - x}{2} + \frac{x - 2}{2} = -1$$

Eliminando denominadores.

$$2x - 4 - x + x - 2 = -2 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Sustituyendo en los despejes anteriores de y, z, obtenemos éstas.

$$z = \frac{x - 2}{2} = \frac{2 - 2}{2} = \frac{0}{2} = 0 ; \boxed{z = 0}$$

$$y = \frac{-4 - x}{2} = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 ; \boxed{y = -3}$$

Ej.: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{6} \end{array}\right\}$$

Vamos a resolverlo por reducción. Eligiendo la segunda ecuación y la tercera multiplicada por -1, obtenemos una ecuación en x e y.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}$$
$$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{4}{3}-\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{3}{6} \Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$$

que con la primera ecuación forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$$\frac{2}{x}=\frac{4}{2} \Rightarrow \frac{2}{x}=2 \Rightarrow \frac{2}{2}=x \Rightarrow \boxed{x=1}$$

De la primera ecuación obtenemos la y.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{3}{2}-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=2}$$

De la segunda ecuación obtenemos la z.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{1}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{4}{3}-1 \rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{z=3}$$

5.— Ecuación de Segundo Grado. Primera Forma General. Soluciones.

Se entiende por ecuación de segundo grado a aquéllas en las que el polinomio de la ecuación es de segundo grado, es decir cuando el mayor exponente de la incógnita es 2.

Son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a es el coeficiente del término x^2, b es el coeficiente del término x y c el término independiente.

El problema de resolver cualquier ecuación ya sabemos que consiste en despejar la incógnita, lo que ocurre que cuando la ecuación de segundo grado está completa no es posible despejar la incógnita por los procedimientos conocidos y hay que recurrir a la utilización de la fórmula que vamos a desarrollar:

Partimos de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

Transponemos al término independiente: $ax^2 + bx = -c$

Multiplicamos la ecuación por 4a: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Sumamos b^2 a los dos miembros: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Reducimos el primer miembro: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros: $\sqrt{2ax + b^2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

La Grecia clásica que dio origen a la geometría de Euclides fue destruida por Alejandro Magno y reconstruida con nuevas directrices. En Egipto, Alejandro fundó una nueva ciudad situada al oeste del Delta del Nilo a la que llamó Alejandría, trasladó de Atenas a esta ciudad el centro de su imperio y proclamó su intención de fusionar las civilizaciones griegas y del Oriente próximo.

La ciencia aplicada y la ingeniería son en gran parte cuantitativa.

Los Alejandrinos primeramente adoptaron el conocimiento aritmético de base experimental, obtenido anteriormente por los egipcios y babilonios. Puesto que la geometría Euclidiana ofrecía la seguridad de una demostración, continuó su uso hasta el siglo XIX en que los matemáticos llegaron a proporcionar una base axiomática para la aritmética y el álgebra.

Una historia interesante podia escribirse pensando en los grandes acontecimientos de la Humanidad que se han gestado alrededor de una taza de café.

Muchas anécdotas han tenido como testigo una taza de infusión de los granos que descubrieron unas cabras de Abisinia.

Siempre el café ha sido, es y será huésped grato del hogar, en el laboratorio, en la biblioteca, en la oficina y en la tertulia es también compañero inseparable de los estudiantes en sus horas de insomnio.

Los amigos de esta bebida alegan que es beneficiosa frente a la somnolencia, vence el cansancio, la depresión, la desgana y levanta la tensión.

Sus detractores suelen ser aquellos que no pueden beberlo por prescripción facultativa, como aquel obispo que le llamó «¡Bebida de Satanás!» y al que el Papa Clemente VIII, gran aficionado al café, contestó: «Por Dios, esta bebida de Satanás es tan deliciosa que sería una lástima dejarla para uso exclusivo de los pecadores, burlaremos al diablo bautizándola».

Si queremos ponernos en el punto medio diremos que tomar café es una costumbre beneficiosa, pero de la que no conviene abusar, ya que la cafeína produce accidentes tóxicos con sólo la dosis de un gramo y que a los 3 gramos puede ser mortal.

Operamos: $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Restamos b a los dos miembros: $2ax + b - b = -b \pm \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Operamos: $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Despejamos x: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Esta primera forma general de la ecuación de segundo grado sirve para obtener las soluciones mediante la aplicación de la fórmula.

$$ax^2 + bx + c = o$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \quad \text{SOLUCIONES, RAICES, CEROS}$$

Por supuesto la sustitución de las soluciones x_1 ó x_2 en la ecuación dada, deben de verificar la igualdad de la ecuación.

Ej.: Resolver la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

Inicialmente debemos de reconocer en la ecuación propuesta los valores de los coeficientes a, b y c que debemos de introducir en la fórmula.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Sustituimos a, b y c en la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Obsérvese que se utiliza el signo + o − independientemente para obtener las soluciones.

Ej.: Resolver la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = 7 \pm \frac{\sqrt{49 - 24}}{4} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{7+5}{4} = 3 \\ \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ej.: Resolver la ecuación $3x^2 - 4 + 7x = 8x + 2x^2 + 2$

Transponemos términos, por ejemplo al primer miembro, para que la ecuación vaya adquiriendo la forma general de la de segundo grado.

$$3x^2 - 4 + 7x = 8x + 2x^2 + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 4 + 7x - 8x - 2x^2 - 2 = 0$$

Reducimos términos semejantes y obtenemos:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 // \\ \frac{1-5}{2} = -2 // \end{cases}$$

Ej.: Resolver la ecuación $\frac{6}{x} - \frac{5x - 2}{2} = \frac{7x}{2} - 8$

Inicialmente eliminaremos denominadores, hallando el m.c.m. de todos ellos. m.c.m. $(x, 2, 2, 1) = 2x$

$$2 \cdot 6 - x(5x - 2) = x \cdot 7x - 8 \cdot 2x$$

Eliminamos paréntesis a continuación y operamos:

$$12 - 5x^2 + 2x = 7x^2 - 16x$$

Transponemos términos al segundo miembro por ejemplo:

$$0 = 7x^2 - 16x - 2x + 5x^2 - 12 \Rightarrow 0 = 12x^2 - 18x - 12 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 3x - 2$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0; \; x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2(-2)}}{2 \cdot 2} =$$

$$= 3 \pm \frac{\sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} = 2 // \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} // \end{cases}$$

Ej.: Resolver la ecuación: $\frac{(2x - 1)^2}{4} - \frac{(3x + 1)^2}{9} = \frac{1}{6}$

m.c.m. $(4, 9, 6) = 36$ para eliminar denominadores

$$9(2x - 1)^2 - 4(3x + 1)^2 = 6$$
$$9(4x^2 + 1 - 4x) - 4(9x^2 + 1 + 6x) = 6$$
$$36x^2 + 9 - 36x - 36x^2 - 4 - 24x = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -60x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{60} //$$

Obsérvese que en este caso no se reproduce una ecuación de segundo grado, aunque aparentemente, parecía lo contrario al principio.

La Cibeles es para Madrid lo que es para New York la estatua de La Libertad, la Torre Eiffel para París o la Torre del Parlamento para Londres. En efecto, ella es la brújula que señala el carácter de la ciudad.

Fue construida en tiempos de Carlos III según proyecto de Ventura Rodríguez, de cuya realización se encargara Roberto Mitchel y Francisco Gutiérrez. En principio se pensó en instalarla en la Granja, pero luego en 1780 se colocó en la plaza donde está, aunque se emplazó mirando hacia el salón del Prado, en la entrada de Recoletos cerca del jardín del Ministerio de Guerra. Allí estuvo hasta 1895 en que se trasladó al centro de la plaza. En su primer estado la fuente era más baja y se hallaba rodeado su tazón de un fino enrejado con cuatro faroles en el andén circular. Al cambiarla de lugar se la colocó sobre una plataforma de tres metros de altura y se pusieron detrás del carro los dos niños que juegan con un jarrón, rodeándola de una verja más fuerte y de mayor empaque que estuvo allí hasta septiembre de 1943 en que se sustituyó por el jardincillo que hoy tiene.

Antes de inventarse el cloroformo algunos sufridos pacientes soportaban las más violentas operaciones quirúrgicas sin dar señal alguna de dolor y afirmaban después que el secreto consistia en concentrar su pensamiento intensamente incluso realizando un poderoso esfuerzo sobre una materia que realmente les cautivase.

La influencia de la mente en nuestra vida y en nuestra salud está plenamente comprobada, la concentración del pensamiento puede llegar a producir enfermedades e incluso a curarlas, si somos dominados por el miedo o la cólera y tenemos fuerza de voluntad. Para sobreponernos a este dominio de la mente bastará para que poco a poco recobremos el equilibrio.

Por el contrario, cuando el terror nos invade, la inseguridad multiplica el peligro y nos cierra la mente privándonos del más elemental raciocinio para poder ver claramente la solución. El pensamiento es el generador de nuestra vida.

Cada uno llevamos en nosotros mismos la causa y el efecto si bien es cierto que las circunstancias ambientales que nos rodean marcan poderosamente nuestras vidas, también lo es que un pensamiento claro y una voluntad firme pueden conseguir milagros.

Ej.: Hallar el valor de p en la ecuación $x^2 + px - 24 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es -3. Hallar la otra raíz.

El hecho de que un número sea solución o raíz de una ecuación implica de forma incuestionable que sustituido en la ecuación debe de verificar la igualdad de ésta.

Haciendo lo propio con el -3, obtendremos el valor p.

$$x^2 + px - 24 = 0 \Rightarrow (-3)^2 + p(-3) - 24 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9 - 3p - 24 = 0.$$
$$-3p = 24 - 9 \Rightarrow -3p = 15 \Rightarrow p = \frac{15}{-3} = -5 //$$

Para hallar la otra raíz, sustituiremos p en la ecuación primitiva y resolviéndola obtendremos dos raíces; una de ellas será -3 y la otra la que nos falta.

$$x^2 - 5x - 24 = 0; x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{5 \pm 11}{2} = \begin{cases} \frac{5+11}{2} = 8 // \\ \frac{5-11}{2} = -3 // \end{cases}$$

6.— NATURALEZA DE LAS RAICES DE UNA ECUACION

De lo que trataremos aquí es de ver cuál es la calidad numérica de las soluciones de una ecuación. Asunto que se detecta con el solo hecho de estudiar el signo de $b^2 - 4ac$, (expresión que recibe el nombre de **discriminante de la ecuación de segundo grado**).

La ecuación posee dos soluciones complejas ($b^2 - 4ac > 0$).

Ej.: Resolver la ecuación: $x^2 + 3x - 28 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} =$$
$$= \frac{-3 \pm 11}{2} = \begin{cases} 4 \\ -7 \end{cases}$$

Obsérvese como el discriminante $b^2 - 4ac = 121 > 0$ es mayor que cero y las soluciones son reales y distintas.

La ecuación posee dos soluciones reales iguales o raíz doble ($b^2 - 4ac = 0$)

Ej.: Resolver la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} =$$
$$= \frac{6 \pm 0}{2} = \begin{cases} \frac{6+0}{2} = 3 \\ \frac{6-0}{2} = 3 \end{cases}$$

Obsérvese como el discriminante $b^2 - 4ac = 0$ y las soluciones son reales e iguales.

La ecuación posee dos soluciones complejas ($b^2 - 4ac < 0$)

Ej.: Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

Obsérvese cómo el discriminante $b^2 - 4ac < 0$ y las soluciones son complejas. Efectivamente, no podemos localizar dentro del conjunto R, ningún número tal que elevado al cuadrado nos reproduzca $-16 (4^2 = 16 \text{ y } (-4)^2 = 16)$, hecho que nos coloca fuera del conjunto R. (Asunto que ocurre siempre que tenemos que averiguar la raíz cuadrada de un número negativo).

No obstante esta cuestión será tratada ampliamente en el tema de números complejos.

Ej.: Hallar el valor que debe tener m en la ecuación $x^2 - 8x + m = 0$ para que tenga sus dos raíces iguales.

Es evidente que si la ecuación tiene sus raíces iguales, es que su discriminante debe ser cero. Con esta condición, formamos una ecuación de donde deducimos el valor de m.

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{64}{4} = 16 //$$

7.— ECUACIONES INCOMPLETAS DE SEGUNDO GRADO

Son aquellas ecuaciones de segundo grado a las que les falta el término en x o el término independiente, nunca el término en x^2 ya que no serían ecuaciones de segundo grado.

Aunque este tipo de ecuaciones siguen siendo perfectamente solucionables por el método general, es decir aplicando la fórmula, vamos a intentar otros procedimientos particulares, únicamente aplicables a ellas.

— Cuando falta el término en x : $(b = 0)$

Despejamos la incógnita x directamente, que es de lo que se trata.

Ej.: Resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 //$$

— Cuando falta el término independiente $(c = 0)$

Un corcho y una botella valen 1,10 ptas.; la botella vale 1 pta. más que el corcho. ¿Cuánto vale el corcho y cuánto vale la botella?

Solución

¡¡Cuidado!!, no respondas rápidamente, sé que vas a decir la botella vale 1 pta. y el corcho 0,10 ptas. (o diez centimos) No; ésta no es la solución porque entonces, de ser asi tendriamos que $1 - 0{,}10 = 0{,}90$ ptas. que no es la diferencia que se pide.

Veámoslo con detenimiento: ¿No sería mejor que la botella costara 1,05 ptas. y el corcho 0,05? Restando $1{,}05 - 0{,}05 = 1$, entonces sí daría como resultado 1 pta. Pero veámoslo por ecuaciones, algebraicamente.

Llamaremos x al corcho.

Llamaremos y a la botella.

Entonces

$$\begin{cases} x + y = 1{,}10 \\ y = 1 + x \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} y = 1{,}10 - x \\ y = 1 + x \end{array} \right|$$

$1{,}10 - x = 1 + x$; $1{,}10 - 1 = 2x$;

$0{,}10 - 2x$; $x = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05$ *valor del corcho*

La botella valdrá:

$y = 1{,}10 - x$; $1{,}10 - 0{,}05 = 1{,}05$ *valor de la botella*

Se reunieron en una comida el alcalde del pueblo y su hija, y el maestro y su mujer.

Después de los entremeses pidieron truchas y les trajeron una fuente con nueve.

Después de repartirlas tocaron equivalentemente a tres truchas cada uno.

¿Cómo puede ser esto?

La solución en (Pág. 316)

Extraemos el factor común que se pueda de la ecuación propuesta, quedando un producto de factores igual a cero. Las soluciones se obtienen haciendo cada factor del producto igual a cero.

Ej.: Resolver la ecuación $x^2 - 4x = 0$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0// \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4// \end{cases}$$

NOTA.—En cualquier ecuación que exista un producto de factores igual a cero y nada más que cero, se puede plantear que cada factor del producto es cero obteniendo ecuaciones más sencillas de resolver.

8.— SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAICES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

En cualquier ecuación de segundo grado se puede conocer la suma y el producto de sus soluciones sin necesidad de resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_1 \\ \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x_2 \end{cases}$$

Suma de las raíces

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\boxed{S = -\frac{b}{a}}$$

Producto de las raíces

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{P = \frac{c}{a}}$$

Ej.: Hallar la suma y el producto de las raíces de la ecuación $x^2 - 11x + 24 = 0$, sin resolverla.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-11}{1} = 11 /\!/ ; \quad P = \frac{c}{a} = \frac{24}{1} = 24 /\!/$$

Ej.: Hallar la suma y el producto de las raíces de la ecuación $(m^2 - 1)x^2 + (m - 1)x + (m + 1) = 0$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{m-1}{m^2-1} = -\frac{m-1}{(m+1)(m-1)} =$$

$$= -\frac{1}{m+1} = \frac{1}{1-m} /\!/$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{m+1}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{m-1} /\!/$$

9.— ECUACION DE SEGUNDO GRADO. SEGUNDA FORMA GENERAL. FORMA CANONICA

La primera forma general de la ecuación de segundo grado, habíamos visto que servía para localizar sus soluciones mediante la aplicación de la fórmula.

Pues bien, la segunda forma general, sirve entre otras cosas fundamentalmente para hacer lo contrario. Es decir que teniendo las raíces de una ecuación de segundo grado, podemos localizar la ecuación que las reproduce.

Vamos a ver pues, el proceso que nos permite llegar a esta forma general:

— Dividimos la primera forma general por a

$$ax^2 + bx + c = o \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

— Haciendo una pequeña operación podemos identificar expresiones con la suma y el producto de las raíces

$$x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

NOTA.—Se advierte que en esta forma general el coeficiente de x^2 debe ser siempre la unidad, para que el coeficiente de x sea la suma (S) y el término independiente el producto (P).

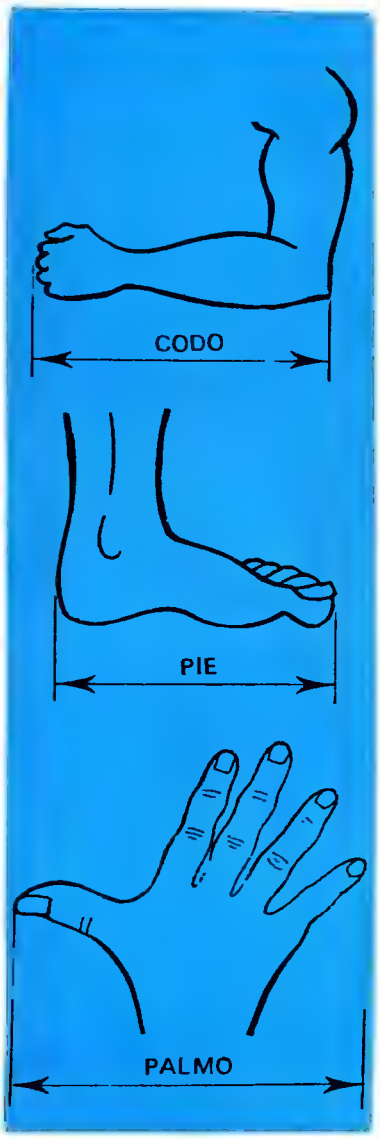
Ej.: Formar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones, 7 y − 2

$$\left.\begin{array}{l} S = 7 - 2 = 5 \\ P = 7(-2) = -14 \end{array}\right| \; x^2 - 5x + (-14) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$$

La torre de Babel, según la Biblia (Génesis XI-1-9) construida por los habitantes del valle de Senaar, en Babilonia, y, pretendían que llegara hasta el cielo, Dios castigó su orgullo haciendo que hablasen diferentes lenguas, y al no poder entenderse abandonaron las obras dispersándose finalmente.

Ultimamente se ha pretendido identificar las mismas existentes en Tell-Amram en Babilonia, con la famosa torre.

En realidad estos descubrimientos nos muestran restos de una torre de 90 metros de lado, cuyo primer piso alcanzaba 33 m, el segundo 18 y unos 6 metros cada uno de los siguientes, excepto el séptimo que media 15 metros. En la parte superior se hallaba el templo del Dios de Babilonia, adornado de azulejos. Delante de la estatua de Marduk habia según Heródoto un sitial de oro puro con un peso de 800 talentos. También alli los sacerdotes conservaban la unidad de medida de peso «el talento patrón» un cilindro de piedra cuyo peso era de 29,68 kg. Por lo tanto la estatua del dios según la descripción de Heródoto pesaba 23.744 kg. de oro puro.



La primera unidad de medida la llevaba el hombre consigo mismo: era su cuerpo. No habéis pensado nunca en las medidas antiguas el pie, el palmo, la braza, el codo. Aquí fue donde los primeros geómetras consiguieron sus unidades de medida.

Cuando se empezaron a construir los primeros templos, los arquitectos necesitaron emplear estas unidades de medida, pero... todos los pies, brazos, palmos y codos no eran iguales. Primero sirvieron las medidas del mismo constructor de dichos templos, palacios, etc... Pero más adelante y en homenaje al monarca de cada país, se tomaron sus medidas y con ellas construyeron reglas de madera o metálicas y éstas fueron las *primeras unidades de longitud.*

Ej.: Formar una ecuación de segundo grado que tenga por raíces, $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$

$$S = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 =$$

$$= 4 - 3 = 1 \qquad x^2 - 4x + 1 = 0$$

Ej.: Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por raíces 2/3 y a su recíproco.

Las raíces son, pues: $x_1 = 2/3$ y $x_2 = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = 3/2$

$$S = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6}$$

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

10.— ECUACION DE SEGUNDO GRADO. TERCERA FORMA GENERAL. DESCOMPOSICION EN PRODUCTO

Sirve para descomponer una ecuación de segundo grado en un producto de factores, conociendo previamente sus raíces.

Vamos a ver pues, el proceso que nos permite llegar a esta forma general:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2)\right] =$$

$$= a[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$

$$= a[(x - x_2)(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

NOTA.—Del término a delante de $(x - x_1)(x - x_2)$ sólo se puede prescindir cuando el polinomio de segundo grado esté igualado a cero (ya que podemos dividir por a toda la ecuación), nunca cuando el polinomio esté en forma ordinaria, es decir, sin igualar a cero y consecuentemente sin formar parte de una ecuación.

Ej.: Transformar en producto la ecuación: $x^2 - x - 2 = 0$

Localizamos primeramente sus soluciones:

$$x^2 - x - 2 = 0;\ x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1(-2)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Aplicamos la tercera forma general:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$$

Ej.: Simplificar la expresión: $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

En el tema de polinomios, recordaremos que simplificamos estas expresiones dividiendo por el M.C.D. del numerador y denominador. Pues bien, también existe otro camino, que es descomponer en producto el polinomio de 2.º grado del numerador:

$$x^2 - 4x + 3 = 0;\ x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Con lo que transformamos la expresión inicial

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{(x - 3)(x - 1)}{x - 1} = x - 3$$

11.— REPRESENTACION GRAFICA DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado ($ax^2 + bx + c = 0$) viene representada gráficamente por una línea parabólica.

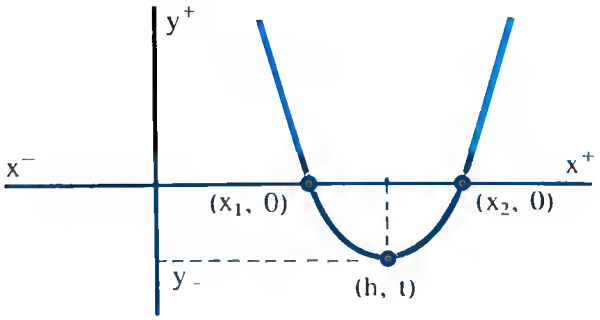
Para representar esta parábola en unos ejes coordenados cartesianos, es necesario seguir los siguientes pasos:

Se resuelve la ecuación, proporcionándonos dos valores x_1 y x_2 que se corresponden con los puntos de corte de la parábola con el eje X. Puntos $(X_1, 0)$ y $(X_2, 0)$.

—Se obtiene la semisuma de las soluciones $h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

introduciendo este valor h en la ecuación obtenemos otro valor t, formando un punto (h, t) correspondiente al punto mínimo o vértice de la parábola.

Con los tres puntos obtenidos $(x_1, 0)$ $(x_2, 0)$ y (h, t) ajustamos la línea parabólica correspondiente a la ecuación propuesta.



El pan nuestro de cada día dánosle hay ... pudiera ser el lema del museo del pan de la ciudad alemana de Ulm. Este museo particular fue abierto en 1955 por el Sr. Eiselen. Este señor aficionado al pan, dice de él que no solamente le gusta, sino que lo venera, y ha reunido todos los utensilios de panadería, las técnicas para su fabricación, obras de arte donde se representan el proceso de fabricación a través de los tiempos etc... así como una gran biblioteca que contiene todo lo que jamás se haya escrito acerca del pan.

Tal vez lo más interesante sean las muestras de diferentes panes, entre ellos uno de la época de los Vikingos, otro de Egipto, así como un pan de Pompeya. No sabemos quiénes fueron los primeros seres humanos que hicieron pan, pero los objetos expuestos en el museo demuestran que ya 6.000 años antes de Cristo las mujeres amasaban la harina y cocían el pan. Se ha podido comprobar también que en algunos países el pan sustituyó a la moneda sirviendo de base para toda clase de intercambios de mercancías.

Saber leer rápidamente y con poco esfuerzo es muy importante para los estudiantes de cualquier especialización. Algunos leen moviendo los labios y pronunciando palabra por palabra, de esta forma toda la energía se derrocha y no se llega a asimilar el pensamiento. Leer bien es comprender e interpretar el mensaje del autor, es tener despierto el espíritu de observación y de análisis para que nuestra mente registre el mensaje que por mediación de los ojos llevamos al cerebro.

Por cada movimiento del ojo tenemos que abarcar el mayor número posible de palabras. Empieza considerando cada línea dividida en tres zonas, luego en dos, termina viéndola toda la línea completa de un solo golpe de vista es necesario concentrarse, se pueden comparar los progresos conseguidos anotando el tiempo que se tarda en leer una página, luego fraccionando los renglones visualmente es necesario leer siempre subrayando con un lápiz de color las partes esenciales del texto para facilitar su posterior revisión.

El secreto de ello consiste en practicar constantemente.

Ej.: Representar gráficamente la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$

Obtenemos los puntos de corte de la parábola con los ejes.

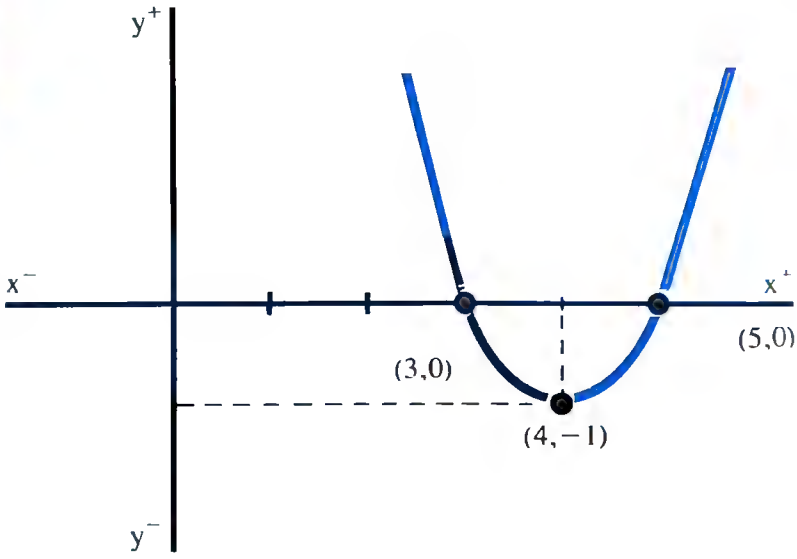
$$x^2 - 8x + 15 = 0 \; ; \; x = \frac{(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 5 \Rightarrow (5, 0) \\ 3 \Rightarrow (3, 0) \end{cases}$$

Hallamos el vértice de la parábola

$$h = \frac{5 + 3}{2} = 4 \Rightarrow t = 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = -1 \Rightarrow (4, -1)$$

Ajustamos la parábola con los puntos. (5,0) (3,0) (4,− 1)



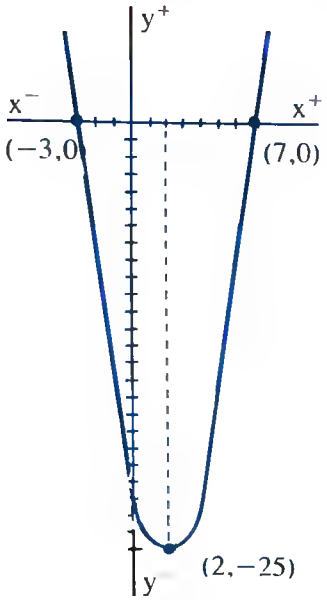
Ej.: Representar la ecuación $x^2 - 4x - 21 = 0$

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \; ; \; x =$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{4 \pm 10}{2} = \begin{cases} 7 \Rightarrow (7, 0) \\ -3 \Rightarrow (-3, 0) \end{cases}$$

$$h = \frac{7 - 3}{2} = 2 \Rightarrow t = 2^2 - 4 \cdot 2 - 21 = -25 \Rightarrow (2, -25)$$



Ej.: La suma de las raíces de la ecuación $x^2 - (a + 2)x + b = 0$ vale -5 y su diferencia 7. Calcular los valores numéricos de a y de b.

Vamos a hallar las dos soluciones x_1 y x_2 de la ecuación propuesta mediante un sistema de ecuaciones y luego calcularemos a y b.

$$\begin{array}{r} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = \ \ 7 \\ \hline 2x_1 \quad = \quad 2 \end{array} \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -5 - x_1 = -5 - 1 = -6 \Rightarrow x_2 = -6$$

Si las dos raíces de la ecuación son 1 y -6, tendrán que verificar cada una de ellas por separado a la ecuación en cuestión, obteniendo así un sistema de ecuaciones de donde deducimos a y b.

$$x^2 - (a + 2)x + b = 0 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \Rightarrow 1^2 - (a + 2) \cdot 1 + b = \\ = 0 \Rightarrow 1 - a - 2 + b = 0 \\ \\ x_2 = -6 \Rightarrow (-6)^2 - (a + 2) \\ (-6) + b = 0 = \Rightarrow 36 + \\ + 6a + 12 + b = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{r} a - b = -1 \\ 6a + b = -48 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} 7a \quad = -49 \end{array} \Rightarrow a = -7 \Rightarrow b = a + 1 = -7 + 1 = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -6$$

Ej.: Que valor debe tener m en la ecuación $121x^2 + m x - 28 = 0$ para que sus dos raíces difieran en una unidad.

Si el hombre no hubiera desarrollado los diferentes tipos de calendarios por los que según cada raza o religión mide el tiempo y en su lugar fuera contando por un sencillo sistema de suma los días transcurridos, partiendo del año cero de nuestra era hoy estaríamos aproximadamente en el día 700.000 y en la hora 18.000.000; Como el día tiene veinticuatro horas y normalmente usamos un reloj de doce horas, la forma de distinguir es poner detrás del nombre de la hora «de la mañana» o «de la tarde» o también las 4 a. m. ó 4 p. m. antes del meridiano de las 12 h. o después de las 12 h.

Análogamente hay siete clases de días en una semana y doce clases de meses en un año; Gauss estableció por medio de datos astronómicos reglas que nos permiten determinar fácilmente las fechas de la Pascua que dependen del calendario lunar y congruencias semejantes permiten saber una determinada fecha en cualquier año.

Un avión, en vuelo charter, cubrió la distancia que separaba las ciudades Madrid y París en dos horas y veinte minutos. Sin embargo, en el viaje de vuelta París Madrid tardó 140 minutos.

¿Qué ocurrió?

NOTA: La velocidad del viento (S.W. o sud oeste) era prácticamente nula.

Solución en pág. 316.

Resolvemos la ecuación y les imponemos a las raíces la condición que nos citan.

$$121x^2 + mx - 28 = 0 \; ; \; x =$$

$$= \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4 \cdot 121 \cdot (-28)}}{2 \cdot 121} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 13552}}{242} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 13552}}{242} \\ \dfrac{-m - \sqrt{m^2 + 13552}}{242} \end{cases}$$

$$\frac{-m + \sqrt{m^2 + 13552}}{242} - \frac{-m - \sqrt{m^2 + 13.552}}{242} = 1$$

$$\frac{-m + \sqrt{m^2 + 13.552} + m + \sqrt{m^2 + 13.552}}{242} = 1 \; ;$$

$$; \; \frac{2\sqrt{m^2 + 13.552}}{242} = 1$$

$$\frac{\sqrt{m^2 + 13.552}}{121} = 1 \; ; \; \sqrt{m^2 + 13.552} = 121 \; ;$$

$$; \; \left(\sqrt{m^2 + 13.552}\right)^2 = 121^2 \; ; \; m^2 + 13.552 = 14.641 \; :$$

$$; \; m^2 = 1.089 \; ; \; m = \pm \sqrt{1089} = \pm 33 \; ; \; m = \pm 33$$

Ej.: Resolver la ecuación

$$\frac{1 - x}{1 + x} + \frac{x^2 + 7}{1 - x^2} = \frac{3x - 7}{1 - x}$$

$$\text{m.c.m.} \; (1 + x, \; 1 - x^2, \; 1 - x) = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

$$(1 - x)(1 - x) + (x^2 + 7) = (3x - 7)(1 + x) \; ;$$

$$(1 - x)^2 + x^2 + x^2 + 7 = (3x - 7)(1 + x) \quad 1 + x^2 - 2x + x^2 + 7 = 3x + 3x^2 - 7 - 7x \; ; \; x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Ej.: Expresar en función de p y q la suma de los cuadrados de las

soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ llamando x_1 y x_2 a las soluciones, lo que se pide es $x_1^2 + x_2^2$.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$ ya que

$S = x_1 + x_2 = -p$ y $P = x_1 x_2 = q$

12.— SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

El método operativo para resolver estos sistemas es el mismo que se utiliza para resolver los sistemas de primer grado. De todas formas hay que matizar, que quizás el método de sustitución sea el más adaptable desde un punto de vista general de todos los sistemas.

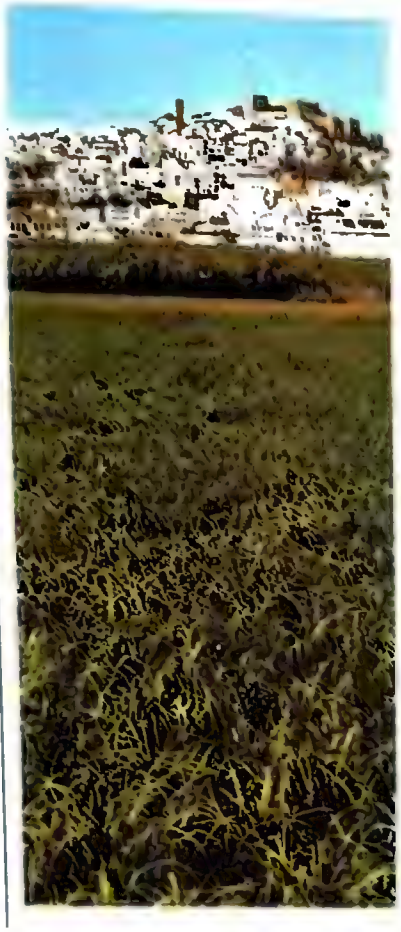
La única diferencia entre los sistemas de primer grado y los de segundo, es que en aquéllos, al aplicar el método, obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita y en los de segundo grado al aplicar el método obtenemos una ecuación de segundo grado con una incógnita, exceptuando algunos casos.

Así los sistemas de segundo grado, pueden tener para sus incógnitas, una, dos o más soluciones, que localizaremos al resolver.

Uno de los animales más exóticos que pueden verse en cautividad en alguno importantes parques zoológicos es el oso panda.

Animal muy escaso que solamente puede encontrarse en libertad en la zona del Mupin, en la parte oriental del Tibet, a unos 3.400 metros de altura, se le llama también oso de los bambúes, por vivir preferentemente entre los bosques de bambú, cuyos brotes y hojas tiernas constituyen su alimentación y que acabó adaptando su dentadura a este régimen de comida predominantemente arboricora.

En la parte china del Yun-nair y del Sse-Chúan estos animales están protegidos por guardas especializados que conservando la libertad y las constumbres de estos osos, los protegen de todos los peligros e incluso acompañan constantemente a los visitantes que debidamente autorizados visitan estas reservas donde reina este pequeño animal, de piel blanca y suave, con orejas, hombros, patas y un círculo en cada ojo de color negro.



Ej.: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 5 - y \\ (5 - y)^2 + y^2 = 13 \end{array}$$

$$25 + y^2 - 10y + y^2 = 13;\ 2y^2 - 10y + 12 = 0;$$
$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 2y}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}$$

Sustituyendo los valores de $y = 2$ e $y = 3$ en $x = 5 - y$ obtenemos los valores correspondientes de x.

$$y = 3 \Rightarrow x = 2$$
$$y = 2 \Rightarrow x = 3$$

Ej.: Resolver el sistema

$$2xy - 3y = -2$$
$$2x - 3y = -4$$

$$\left.\begin{array}{l} 2xy - 3y = -2 \\ 2x - 3y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$2\,\frac{3y - 4}{2}\,y - 3y = -2 \Rightarrow (3y - 4)y - 3y = -2$$

$$3y^2 - 4y - 3y = -2\ ;\ 3y^2 - 7y + 2 = 0$$

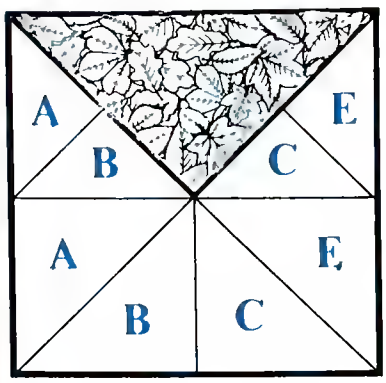
$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{array}{l} 2 \\ 2/6 = 1/3 \end{array}$$

Sustituyendo los valores de y en $y = \frac{3y - 4}{2}$ obtenemos los valores de x para $y = 2$; $x = \frac{3 \cdot 2 - 4}{2} = 1$

Para $y = \frac{1}{3}$; $x = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} - 4}{2} = -3/2$

Solución al problema de la pag. 282

Si designamos a los herederos con las letras A, B, C, E, podemos ver en el dibujo que cada uno recibirá un triángulo grande y otro pequeño que cumple la condición de superficie igual y forma igual.



13.— ECUACION BICUADRADA

Se llaman así a aquellas ecuaciones que tienen un término en x^4, otro en x^2 y un término independiente.

Se resuelven reduciéndolas a una ecuación de segundo grado mediante un cambio de incógnita de la forma:

$$\left.\begin{matrix} x^2 = p \\ x^4 = p^2 \end{matrix}\right\}$$

Ej.: Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

La reduciremos a una de 2.º grado mediante el cambio citado.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad \left.\begin{matrix} x^2 = p \\ x^4 = p^2 \end{matrix}\right\} \quad p^2 - 13p + 36 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2.º grado obtenida:

$$P = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} =$$

$$= \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 9 \\ 4 \end{matrix}$$

A continuación deshacemos el cambio previsto, en la ecuación más elemental del cambio.

$$x^2 = p \quad \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Con lo que obtenemos las cuatro soluciones que debe tener la ecuación bicuadrada

Ej.: Resolver el sistema

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 2x^2 + y^2 - xy = 11 \end{matrix}\right\}$$

En este tipo de sistemas en los que no se pueden despejar las x ni las y de ninguna de las ecuaciones, lo que se suele practicar es aplicar inicialmente el método de reducción para eliminar x^2 o bien y^2 y después continuar con cualquier otro procedimiento.

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 2x^2 + y^2 - xy = 11 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -x^2 - y^2 + 2xy = -1 \\ 2x^2 + y^2 - xy = 11 \end{matrix}\right\}$$

$$x^2 + xy = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{10 - x^2}{x}$$

Hoy que tanto viajamos se observa que las ciudades cada vez se parecen más entre si, van perdiendo las características propias de cada región los rasgos que las definían y así los bloques de apartamentos y las torres de viviendas se repiten en uno y otro lugar, incluso parece que son modelos calcados entre sí.

No obstante existe un elemento —el techo— en que los cálculos de los arquitectos tienen que tener muy presentes las características climatológicas de la zona en que van a edificar. En las zonas nortenas donde llueve y nieva mucho, el techo tiene que ser muy pendiente para favorecer el deslizamiento de la nieve, mientras el agua corre con gran facilidad. Otras zonas de clima más seco permiten la construcción de tejados más suaves o incluso aconseja que se construyan terrazas en lugar de éstos, llegándose a zonas en que las lluvias son tan escasas que para dar más belleza y vistosidad a las construcciones, la parte superior, aparte de la terraza, se pinta de alegres colores igual a las paredes de la vivienda.

Llamamos números *capicúas*, aquellos que leyéndolos de izquierda a derecha es lo mismo que de derecha a izquierda, por ejemplo, 131, 1991, 10401 etc...

Palabras capicúas, son, pues, la misma razón del anterior, por ejemplo, AMA, ANA, ELE, etc...

Pero no sabéis, y sólo por curiosidad, una palabra capicúa que tenga más de ocho letras. Ved:

RECONOCER

¿Cuántas veces puede restarse 34 de 98?

Solucción: Creemos que una sola vez, ya que la segunda será de un número menor de 98 ¿no?

Sustituyendo $y = \dfrac{10 - x^2}{x}$ en la primera ecuación del sistema obtenemos

$$x^2 + \left(\frac{10 - x^2}{x}\right)^2 - 2x\,\frac{10 - x^2}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{(10 - x^2)^2}{x^2} - 2(10 - x^2) = 1$$

$$x^4 + (10 - x^2)^2 - 2x^2\,(10 - x^2) = x^2$$

$$x^4 + 100 + x^4 - 20x^2 - 20x^2 + 2x^4 = x^2$$

$$4x^4 - 41x^2 + 100 = 0$$

Efectuando el cambio para reducir a una ecuación de segundo grado: $x^2 = p$; $x^4 = p^2$

Obtenemos, $4p^2 - 41p + 100 = 0$

$$P = \frac{41 \pm \sqrt{41^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100}}{2 \cdot 4} = \frac{41 \pm 9}{8} = \begin{cases} \dfrac{50}{8} = \dfrac{25}{4} \\ 4 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio y utilizando el más elemental de ellos obtenemos.

$$x^2 = p \begin{cases} x^2 = \dfrac{25}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \pm 5/2 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Así que localizaremos ahora los valores de y correspondientes a los de x obtenidos, por la expresión $y = \dfrac{10 - x^2}{x}$

$$x = 5/2 /\!/ \Rightarrow y = \frac{10 - (5/2)^2}{5/2} = \frac{10 - 25/4}{5/2} = \frac{15/4}{5/2} = \frac{30}{20} = 3/2 /\!/$$

$$x = -5/2 /\!/ \Rightarrow y = \frac{10 - (-5/2)^2}{5/2} = \frac{10 - 25/4}{5/2} = 3/2 /\!/$$

$$x = 2 /\!/ \Rightarrow y = \frac{10 - 2^2}{2} = \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 /\!/$$

$$x = -2 /\!/ \Rightarrow y = \frac{10 - (-2)^2}{2} = \frac{10 - 4}{2} = 3 /\!/$$

14.—ECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas ecuaciones en las que aparecen radicales. Se resuelven generalmente elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación, con el objetivo de eliminar los radicales y reducirlas a otro tipo de ecuaciones ordinarias.

No obstante hay que tener en cuenta que elevar una ecuación al cuadrado significa el «perder» soluciones o el que se introduzcan soluciones «extrañas» en la ecuación, asunto que induce a comprobar las soluciones obtenidas en la ecuación propuesta.

Distinguiremos dos casos:

Cuando existe un solo radical

En este caso aislaremos el radical en uno de los miembros, pasando los demás términos al otro miembro y elevando al cuadrado.

Ej.: Resolver la ecuación $\sqrt{x^2 - 13} + x - 13 = 0$

Aislamos el radical en un miembro.

$$\sqrt{x^2 - 13} = 13 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 - 13}\right)^2 = (13 - x)^2$$

$$x^2 - 13 = 169 + x^2 - 26x \Rightarrow 26x = 182 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 182/26 = 7;\ x = 7//$$

Ej.: Resolver la ecuación $\sqrt{x} - \sqrt{x + 2} = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$

Primeramente eliminamos denominadores (m.c.m. $= \sqrt{x}$)

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x}\ \sqrt{x + 2} = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 2x} = 6$$

Aislamos el radical en un miembro.

$$x - 6 = \sqrt{x^2 + 2x} \Rightarrow (x - 6)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right)^2$$

$$x^2 + 36 - 12x = x^2 + 2x \Rightarrow 36 = 14x$$

$$\Rightarrow x = 36/14 = 18/7;\ x = 18/7.$$

Cuando existen dos o más radicales

Elevamos al cuadrado tal como nos presenten la ecuación y tantas veces como sea necesario hasta que se reduzca al caso anterior y sólo aparezca un radical.

Ej.: Resolver la ecuación $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{2x - 1} = 1$

$$\left(\sqrt{3x + 1} - \sqrt{2x - 1}\right)^2 = 1^2$$

$$\left(\sqrt{3x + 1}\right)^2 + \left(\sqrt{2x - 1}\right)^2 - 2\sqrt{3x + 1}\ \sqrt{2x - 1} = 1$$

$$3x + 1 + 2x - 1 - 2\sqrt{6x^2 - 3x + 2x - 1} = 1$$

$$5x - 1 = 2\sqrt{6x^2 - x - 1} \Rightarrow (5x - 1)^2 =$$

$$= \left(2\sqrt{6x^2 - x - 1}\right)^2$$

La cultura Maya floreció en una zona que hoy comprende parte de los paises de Honduras y Guatemala. Templos y gigantescas esculturas encontradas en la selva, dan testimonio de esta remota civilización, que bien puede colocarse al lado de las grandes culturas del mundo antiguo.

Para interpretar las inscripciones y signos que adornaban sus construcciones y sus figuras fue importantísimo el estudio de un libro escrito por el segundo arzobispo de Yucatán, D. Diego de Landa, y el que anotó indicaciones sobre el modo de reconocer los signos que representan los números, los meses, y los días.

Los mayas llegaron a una gran exactitud astronómica y su calendario era el más exacto del mundo.

Los dibujos de la parte superior son los signos que representaban los diez primeros números, si bien ellos no los combinaban sino que seguían dibujos distintos para los números sucesivos.

$$25x^2 + 1 - 10x = 4(6x^2 - x - 1) \Rightarrow 25x^2 + 1 - 10x = 24x^2 - 4x - 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \; ; \; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Ej.: Resolver la ecuación $\sqrt{1 + \sqrt{13 + \sqrt{x}}} = 2$

Elevamos al cuadrado sucesivamente, teniendo cuidado de ir agrupando los números que vayan quedando sueltos.

$$\left(\sqrt{1 + \sqrt{13 + \sqrt{x}}}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow 1 + \sqrt{13 + \sqrt{x}} = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{13 + \sqrt{x}} = 3$$

$$\left(\sqrt{13 + \sqrt{x}}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow 13 + \sqrt{x} = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = -4$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (-4)^2 \Rightarrow x = 16$$

Ej.: Resolver la ecuación

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 62$$

Eliminamos denominadores inicialmente.

$$\text{m.c.m.} = \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \left(x + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 = x^2 -$$
$$-\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 = x^2 - \left(x^2 - 1\right) = 1$$

$$\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 62 \cdot 1$$

$$\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^2 + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^2 = 62$$

$$x^2 + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 + 2x \sqrt{x^2 - 1} + x^2 + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 - 2x$$
$$\sqrt{x^2 - 1} = 62$$

$$x^2 + x^2 - 1 + x^2 + x^2 - 1 = 62 \Rightarrow 4x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = 16$$
$$x = \pm \sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$$

15.—ECUACIONES RECIPROCAS

Son un tipo especial de ecuaciones que admiten poder solucionarse con los elementos de cálculo que hasta ahora se han estudiado.

Pueden ser de tres tipos:

PENSAMIENTOS

La Matemática honra el espiritu humano.

(LEIBNIZ)

Toda educación cientifica que no se inicia con la matematica es imperfecto en su base.

(COMPTE)

No existe una sola ciencia que hable de la armonia de la naturaleza con más claridad que las matemáticas.

(CARUS)

La escala de la sabiduria tiene sus peldaños hechos de números.

(BLAVATSKY)

Toda mi fisica no pasa de una geometria.

(DESCARTES)

La matematica es la llave de oro que abre todas las puertas.

(DURUY)

Una ciencia natural es, tan sólo una ciencia matemática.

(KANT)

El que no conoce la matematica muere sin conocer la verdad cientifica

(SCHELBACH)

Las leyes de la naturaleza son tan solo pensamientos matemáticos de Dios.

(KEPLER)

La matematica posee una fuerza tan maravillosa que es capaz de hacernos comprender muchos misterios de nuestra Fe.

(SAN JERONIMO)

La matemática es el mas maravilloso instrumento creado por el genio del hombre para el descubrimiento de la verdad

(LAISANT)

Todo aquello que han realizado a lo largo de los siglos los mayores inteligencias esta reunido en una gran ciencia: La Matemática.

(HERBART)

A.— Ecuaciones recíprocas de cuarto grado.

Son de la forma

$$a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a = 0$$

Obsérvese como los términos equidistantes deben llevar coeficientes iguales.

Para resolverlos se sigue el siguiente proceso:

Se dividen por x^2

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

A los términos que llevan x^2 y a los que lleven x por otra parte se les extrae factor común.

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Se hace proceder a la expresión $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ de un cuadrado perfecto

$$a\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Se efectúa un cambio de incógnita de la forma $\left(x + \frac{1}{x}\right) = q$

$$a\,(q^2 - 2) + b\,q + c = 0$$

Se obtiene una ecuación de 2.º grado que se solucionará deshaciendo después el cambio de incógnitas.

$$a\,q^2 + b\,q + c - z\,a = 0$$

Ej.: Resolver la ecuación $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

Dividimos por x^2

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Agrupamos términos de x^2 y de x por otra parte

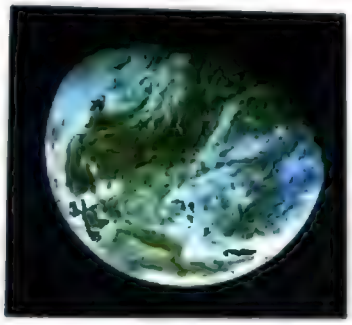
$$1\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

Operamos en $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ y hacemos el cambio de incógnitas.

$$1\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + 1\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = q$$

$$1\,(q^2 - 2) + 1(q) - 4 = 0$$

$$q^2 - 2 + q - 4 = 0\ ;\ q^2 + q - 6 = 0$$



Seis siglos antes de Jesucristo, Tales de Mileto, definió la Tierra como «un inmenso disco que flotaba sobre los océanos». En la India, afirmaban que la Tierra tenía la forma del casco de una tortuga y sostenida por tres colosales elefantes.

Pitágoras, definió la tierra como una inmensa esfera que giraba alrededor del Sol.

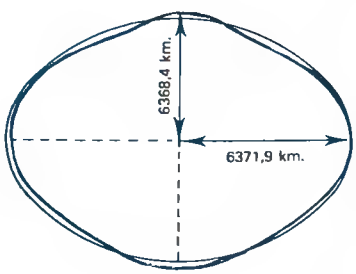
Aristóteles y Ptolomeo, sin embargo y con todo el respaldo de la Escuela de Alejandría, definieron la redondez de la Tierra, echando abajo la teoría de giro alrededor del Sol, y que además estaba aislada en el espacio.

Siglos después, Magallanes y Elcano, demostraron la esferiedad de la Tierra con su viaje alrededor de ella.

Después, apoyándose ya en esta teoría como definitiva, los demás astros, la Luna, el Sol y demás Planetas se consideran como esféricos y con ligeras protuberancias.

Estudios posteriores han demostrado la certeza de esta teoría gracias a los satélites artificiales.

NOTA: Para ver mejor el efecto, hemos exagerado deliberadamente el dibujo.



Gran parte de la actividad de los matemáticos profesionales consiste en la búsqueda de demostraciones nuevas de resultados viejos. Muchos lo hacen por puro placer.

Las matemáticas han crecido tan exuberantemente en los últimos años que necesitan continuamente ser simplificadas, unificadas y condensadas.

Nadie puede hoy día dominar todas las ramas en que se emplean los fundamentos matemáticos.

A fin de proporcionar a los diversos profesionales en cada uno de sus campos conocimientos suficientes para que puedan progresar, es de necesidad absoluta encontrar demostraciones nuevas más breves y más simples. Si la nueva demostracción establece algunas conexiones previamente insospechadas, a menudo conduce a una generalización que hace la tarea de los futuros estudiantes bastante más fácil de lo que fue para sus maestros.

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de incógnita con la ecuación del cambio planteado.

Para $q = 2$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \; ; \; x^2 + 1 = 2x \; ; \; x^2 - 2x + 1 = 0 \; ;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

Para $q = -3$

$$x + \frac{1}{x} = -3 \; ; \; x^2 + 1 = -3x \; ; \; x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

B.—Ecuación recíproca de tercer grado

Son de la forma $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$

Obsérvese como los coeficientes de los términos equidistantes deben ser iguales. Este tipo de ecuaciones siempre tienen como solución $x = -1$, es decir son siempre divisibles por el binomio $x + 1$

Dividiendo la ecuación por Ruffini por el binomio $x + 1$, obtendremos una ecuación de 2.º grado como cociente.

	a	b	b	a
-1		$-a$	$a - b$	$-a$
	a	$b - a$	a	0 = RESTO

COCIENTE: $ax^2 + (b - a)x + a$

Esta ecuación de 2.º grado la resolvemos y obtenemos las otras dos soluciones de la ecuación.

Ej.: Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

Dividimos por x + 1:

	1	2	2	1
− 1		− 1	− 1	− 1
	1	1	1	0 = RESTO

COCIENTE $x^2 + x + 1$

Resolvemos la ecuación obtenida de 2.º grado, de donde obtenemos las otras dos raíces.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

C.—Ecuación recíproca de quinto grado.

Son de la forma: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

Obsérvese como los coeficientes de los términos equidistantes deben ser iguales. Este tipo de ecuaciones son siempre divisibles por x + 1 (tienen como solución x = − 1). Dividiendo la ecuación por Ruffini por el binomio x + 1 obtenemos una ecuación recíproca de 4.º grado.

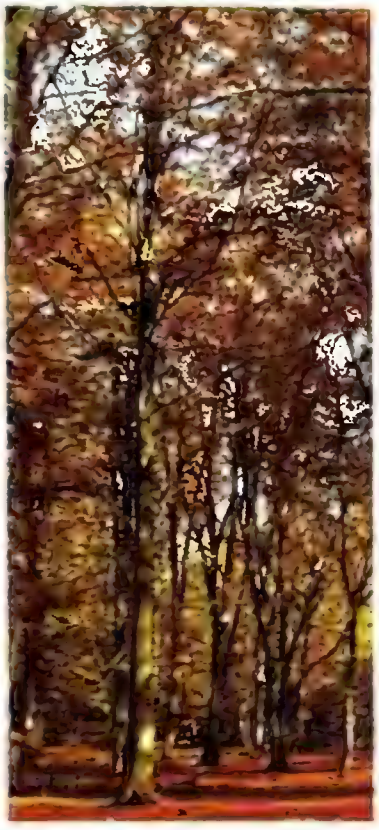
	a	b	c	c	b	a
− 1		− a	a − b	− a+b − c	a−b	− a
	a	b − a	a−b+c	b−a	a	0 = RESTO

COCIENTE: $ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)\,x + a = 0$

La creciente influencia de las matemáticas en el mundo moderno se refleja en la proliferación de sociedades de matemáticos profesionales, así en Estados Unidos existen asociaciones de tipo recreativo que agrupan a profesores, estudiantes y aficionados, que en sus ratos libres organizan concursos y competiciones con base a problemas de cualquiera de los campos de la ciencia, también los matemáticos que salieron de las Universidades trabajan ahora para el gobierno y preferentemente para la industria. Las actividades más o menos relacionadas con esta ciencia emplean hoy docenas de miles de trabajadores en todos los niveles de competencia.

Las matemáticas se han convertido en una amplia profesión que atrae a mujeres y hombres de talento en número creciente.

Las matemáticas han penetrado profundamente en campos tales como la física, en nuevos aspectos de la tecnología, en las ciencias biológicas, la economía y otras disciplinas sociales.



DE POTENCIAS

Con tres doses, tres treses y tres cuatros, vamos a ponerlos de tal manera que alcancemos el mayor número posible:

1.º con 3 doses;
se puede hacer

$$2 \times 2 \times 2 < 2^{2^2} < 2^{22}$$
$$8 < 2^4 < 2^{22}$$

luego el número mayor que se puede escribir con 3 doses es 2^{22}

2.º con tres treses;
se puede hacer

$$3 \times 3 \times 3 < 3^{3^3} < 3^{33}$$
$$27 \times 3^{27} < 3^{33}$$

uego el mayor es 3^{33}

3.º con 3 cuatros
acemos como el anterior

$$4 \times 4 \times 4 < 4^{4^4} \times 4^{44}$$

¡¡OJO!!

ya caiste

$$64 \times 4^{4^{4 \times 4 \times 4}} \times 4^{44}$$
$$64 < 4^{256} > 4^{44}$$

Ten cuidado, las operaciones engañan, te vas dejando llevar a mi terreno y a partir del número cuatro ya es *al revés*. Esto te servirá de ejemplo para razonar un poco más.

16.—PLANTEAMIENTO DE ECUACIONES. PROBLEMAS

Cualquier problema que consista en localizar unos números o cantidades que estén sometidos a ciertas condiciones, es posible calcularlos mediante la formación de ecuaciones. En general un problema de este tipo, requiere el estudio de tres fases.

a) Planteamiento Se elijen para los números desconocidos unas incógnitas. Generalmente tantas incógnitas como datos nos pidan o existan en el problema (hay veces que se puede prescindir de incógnitas, reduciendo las condiciones del problema). A continuación sometemos estas incógnitas a las condiciones expresadas en el problema, formando así las ecuaciones. (Desde este punto de vista, pensaremos que deben existir el mismo número de incógnitas que de ecuaciones).

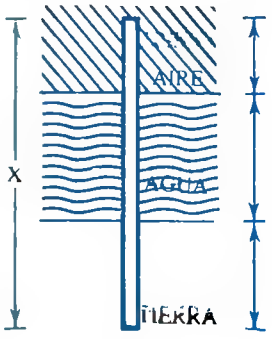
b) Solución Se obtiene resolviendo la ecuación o el sistema de ecuaciones formando en la fase de planteamiento.

c) Interpretación Las soluciones del sistema anterior serán motivo de estudio, adaptándolas a las necesidades del problema en cuestión (por ejemplo una longitud no es correcto que sea negativa, etc. ...).

Ej.: Un poste tiene bajo tierra 2/7 de su longitud, 2/5 del resto sumergido en agua y la parte emergente mide 6 metros. Hallar la longitud del poste.

Como en el problema, nos piden un solo dato (la longitud del poste), vamos a utilizar una sola incógnita

(longitud del poste = x)



6

$$\frac{2}{5}\text{ resto} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{2}{7}x\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{7x - 2x}{7}\right) = \frac{10x}{35} = \frac{2x}{7}$$

$$\frac{2}{7}x = \frac{2x}{7}$$

Evidentemente la suma de las tres partes coincidirá con la longitud del poste.

$$\frac{2x}{7} + \frac{2x}{7} + 6 = x \Rightarrow 2x + 2x + 42 = 7x \Rightarrow 42 = 3x$$

$$x = \frac{42}{3} = 14 \text{ METROS}$$

Ej.: Un librero vendió 84 libros a dos precios distintos: unos a 45 ptas. y otros a 36 pta., y obtuvo de la venta 3.105 pta. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

Evidentemente nos piden dos cosas, es decir dos cantidades de libros:

Libros de 45 ptas. = x Libros de 36 ptas. = y

Planteamos pues las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 84 \\ 45x + 36y = 3.105 \end{array}\right\} \rightarrow x = 84 - y$$

$45 (84 - y) + 36y = 3.105$

$3780 - 45y + 36y = 3.105 ; 675 = 9y ; y =$

$=$ 75 Libros de 86 ptas

$x = 84 - y = 84 - 75 =$ 9 Libros de 45 ptas

Ej.: Una factura de 760 ptas. se ha pagado con monedas de 50, 25, y 5 ptas. El número de monedas de 50 ptas. es doble que el de las de 25 ptas., y las de 5 son la sexta parte de las primeras. ¿Cuántas son las monedas de cada clase?

Nos piden tres cosas, luego utilizaremos tres incógnitas.

Monedas de 50 ptas. = x

Monedas de 25 ptas. = y

Monedas de 5 ptas. = z

Planteamos pues las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 50x + 25y + 5z = 760 \\ x = 2y \\ z = \dfrac{x}{6} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = \dfrac{x}{2} \\ \rightarrow z = \dfrac{x}{6} \end{array}$$

Sustituyendo $y = \frac{x}{2}$ y $z = \frac{x}{6}$ en la primera ecuación obtenemos.

$$50x + 25\frac{x}{2} + 5 \cdot \frac{x}{6} = 760$$

$$300x + 75x + 5x = 4560 ; 380x = 4560 ; x = \frac{4560}{380} = 12$$

$x =$ 12 monedas de 50 ptas.
$y =$ 6 monedas de 25 ptas.
$z =$ 2 monedas de 5 ptas.

Ej.: Hallar dos números cuya suma es 100 y la diferencia de sus cuadrados 1.000.

Nos piden dos números, utilizaremos dos incógnitas x e y.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 100 \\ x^2 - y^2 = 1.000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 100 - y \\ \rightarrow (100 - y)^2 - y^2 = 1.000 \end{array}$$

$$10.000 + y^2 - 200y - y^2 = 1.000$$

$$9.000 = 200y$$

$$y = \frac{9000}{200} = 45 ; \quad y = 45$$

$x = 100 - y = 100 - 45 = 55 ;$ x = 55

En muchas manifestaciones artísticas se experimentan muy pocos cambios en el transcurso de los años, una de estas actividades es la del grabado a mano, arte antiquísimo que sigue practicándose a pesar de la automatización industrial.

En las artes gráficas en la rama dedicada a la fabricación de grandes cajas de cartón para embalar frigoríficos, lavadoras, etc., se emplean todavía clichés de caucho grabados a mano. Estos resisten mejor que los de metal a las grandes tiradas.

Las herramientas que se emplean en este arte son simples y económicas; lápices, reglas escuadras, compases y un elipsógrafo para trazar y cortar óvalos y elipses. También son necesarios para recortar el caucho, buriles punzones y cuchillas muy afiladas. Aunque el artista puede trabajar directamente sobre el caucho, por lo general prepara un boceto sobre papel transparente y luego lo pasa invertido a la plancha de caucho.

Aparte de esta aplicación, el grabado a mano es imprescindible en la fabricación de moldes para la industria inyectora de plásticos; pensemos que las maravillosas maquetas de coleccionistas de trenes, coches, soldaditos, etc, necesitan un molde fabricado en parte por medios mecánicos y acabado y perfeccionado siempre por estos artesanos de gran paciencia y habilidad.

LA BOLA DE NIEVE

Cuando yo era pequeño hubo un negocio de un relojero que yo no supe explicarme. Había un anuncio puesto en el periódico que decía poco más o menos lo siguiente: «Relojes por 5 duros», «Ocasión única», toda persona interesada le enviaremos información gratis. ¿Quién no quería un reloj por 5 duros cuando en aquellos años eso era un artículo de lujo, que casi nadie podía permitírselo? Un vecino escribió y recibió la información. Con los 5 duros no se le enviaba el reloj, sino 4 billetes que tenía que vender a 5 duros cada uno. Los vendió, e inmediatamente de enviarlos, (4 × 5) + 5 = 25 duros eso sí, recibió el reloj. Los otros cuatro poseedores de los billetes tenían que hacer lo mismo y recibían otro reloj... y así hasta que la ciudad se llenase de... billetes de posible compra y... muy pocos relojes vendidos veamos:

personas	duros
1	25
4	100
20	500
100	2.500
500	12.500
2.500	62.500
12.500	312.500
62.500	1.562.500
312.500	7.812.500
1.562.500	39.062.500
5.812.500	195.312.500
39.062.500	976.562.500

Así pues, este fraude no llegó a producirse gracias a un sagaz periodista que lo descubrió. De no ser así 1/5 parte de España tendría relojes y las otras 4/5 partes sólo billetes que vender ayudando a la estafa y los vendedores tendrían... casi todo el dinero de la nación. A esto se le llamó «la bola de nieve».

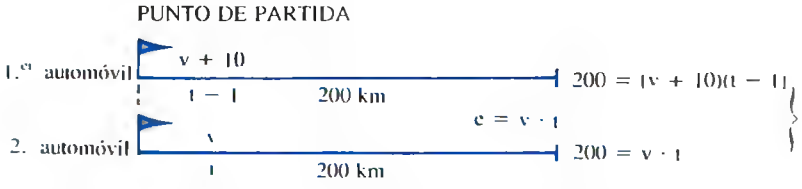
17.— PROBLEMAS SOBRE MOVILES.

Se entiende por móvil a cualquier objeto físico animado de un movimiento.

Este tipo de problemas es una aplicación de las ecuaciones, y se resuelven generalmente teniendo en cuenta que el espacio recorrido por un móvil es igual a su velocidad por el tiempo que invierte en hacer tal recorrido ($e = v \cdot t$). De todas formas en la Física se le da un tratamiento más extenso a los móviles, estudio que corresponde a la Cinética, aquí sólo los utilizaremos desde el punto de vista de ir animados con movimiento rectilíneo y uniforme.

Dos automóviles parten juntos recorriendo 200 Kms. La velocidad del primero en Km/h. es equivalente a la del segundo más 10. De esta forma el primer automóvil tarda una hora menos que el segundo en hacer el recorrido.

Calcular las velocidades de los dos automóviles y el tiempo invertido en el recorrido.



Sistema de ecuaciones que resolvemos y obtenemos lo pedido.

$$\left.\begin{array}{l} 200 = (v + 10)(t - 1) \\ 200 = vt \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 200 = vt - v + 10t - 10 \\ 200 = vt \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{200}{v}$$

Sustituyendo $t = \frac{200}{v}$ en la primera ecuación

$$200 = v\frac{200}{v} - v + 10\frac{200}{v} - 10$$

$$200 = 200 - v + \frac{2000}{v} - 10$$

$$0 = -v + \frac{2000}{v} - 10$$

$$0 = -v^2 + 2000 - 10v$$

$$v^2 + 10v - 2000 = 0 \; ; \; v = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 8000}}{2} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{8100}}{2} = \frac{-10 \pm 90}{2} = \begin{cases} 40 \\ -50 \end{cases}$$

Solución no válida, las velocidades negativas no dicen nada

válida. Las velocidades negaivas no cicen nada).

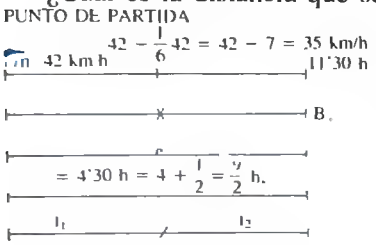
$$v = 40 \rightarrow t = \frac{200}{v} \rightarrow t = \frac{200}{40} = 5 \rightarrow t = 5$$

1er Automovil { Velocidad: 40 + 10 = 50 Km/h. Tiempo: 5 − 1 = 4 h.

2 Automovil { Velocidad: 40 Km/h. Tiempo: 5 h.

Ej.: Un tren parte de una ciudad A a las siete horas de la mañana y llega a otra ciudad B a las once horas y media. Recorre los primeros 3/5 del trayecto a una velocidad de 42 Km/h. y en el resto del trayecto disminuye su velocidad 1/6.

¿Cuál es la distancia que separa a las dos ciudades?



$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{5}\ e = 42 \cdot t_1 \\ \frac{2}{5}\ e = 35 \cdot t_2 \\ t_1 + t_2 = \frac{9}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Tramo AC} \\ \rightarrow \text{Tramo CB} \\ \rightarrow \text{Tramo AB} \end{array}$$

Simplificando el sistema de ecuaciones obtenido.

$$\left.\begin{array}{l} 3e = 210\ t_1 \\ 2e = 175\ t_2 \\ 2t_1 + 2t_2 = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow t_1 = \frac{3e}{210} \\ \rightarrow t_2 = \frac{2e}{175} \end{array}$$

$$2\ \frac{3e}{210} + 2\ \frac{2e}{175} = 9 \rightarrow \frac{3e}{105} + \frac{4e}{175} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{525e + 420e}{18375} = 9 \rightarrow \frac{945e}{18375} = 9$$

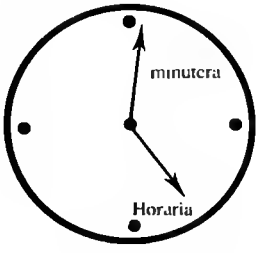
$$945e = 165375 \rightarrow e = \frac{165.375}{945}\ 175\ ; \quad e = 175 \text{ km.}$$

18.— PROBLEMAS SOBRE RELOJES.

Este tipo de problemas, podemos considerarlos como una ampliación de los problmas de móviles.

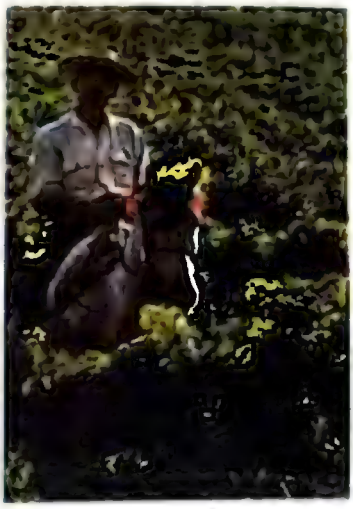
En cualquier reloj, existen dos agujas: la minutera y la horaria.

La minutera lleva una velocidad doce veces mayor que la horaria.



$$e_m = v_m \cdot t = 12v_h \cdot t = 12 \cdot 1 \cdot t = 12t$$

$$e_h = v_h \cdot t = 1 \cdot t = t$$



El idioma de las ecuaciones es fácil... si planteamos bien ésta

Vamos aver si os ayudamos a plantear bien éstas con un problema muy antiguo y a la vez recordando las fábulas de Iriarte y Samaniego.

Un caballo (x) y un asno (y) caminaban juntos llevando su pesada carga sobre sus lomos. Mientras el asno se quejaba de su pesada carga, el caballo le dijo: ¡No te lamentes!, ya que si yo te quitara un saco (y - 1) entonces mi carga (x + 1) sería el doble que la tuya (x + 1) = 2(y − 1).

Sin embargo, si yo te diera un saco (x − 1) entonces tu carga (y + 1) sería igual que la mía (x - 1) = (y + 1)

¿Cuántos sacos llevaba cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 = 2(y - 1) \\ x - 1 = y + 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 1 = 2y - 2 \\ x = y + 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y - 3 \\ x = y + 2 \end{array}\right\}$$

$$2y - 3 = y + 2 \left\{\begin{array}{l} 2y - y = 5 \\ y = 5 \end{array}\right.$$

El asno llevaba 5 sacos.

El caballo x = y + 2 = 5 + 2 = 7 sacos.

PRUEBA

Al coger el caballo un saco del asno este se quedaba con 4 y el caballo con 8 (carga doble).

Al dar el caballo un saco al asno 7 − 1 = 6 y 5 + 1 = 6 entonces la carga de ambos sería la misma.

SOLUCION DE PROBLEMAS PUBLICADOS

Solución al problema de [illegible] de la pag. 29

La hija del alcalde era la mujer del maestro, así se reunían en total tres personas.

9 : 3 = 3

Solución al problema del [illegible] de la pag. 30

2 h + 20 minutos = 120 minutos + 20 minutos = 140 minutos. Quiere decirse que tardó lo mismo.

Aunque parezca mentira Vd. lector que lo ha sacado en seguida, no dejará de reconocer que pueden ocurrir dos circunstancias para no ver el problema rápido, esto es:

1.ª circunstancia. Falta de atención al realizar los cálculos y pensar que cuando está aquí puesto es que tiene que tener su dificultad.

2.ª circunstancia. Al mismo tiempo lo más frecuente. Estamos acostumbrados a usar el sistema decimal (usamos 2 ptas. y veinte céntimos y no lo podemos confundir con ciento cuarenta céntimos) y cuando tenemos que usar el sistema *sexagesimal,* no damos pie con bola. Es un problema un tanto sicológico.

Ej.: Un reloj marca las 5 horas. Averiguar a qué hora coincidirán de nuevo las manecillas por primera vez a partir de esa hora.

$$\left.\begin{matrix} e_m = 12t \\ e_h = t + 5 \end{matrix}\right\} e_m = e_h \rightarrow 12t = t + 5 \; ; \; 11t = 5 \; ; \; t = \frac{5}{11} \text{ h}$$

Como hay que contar a partir de las 5 horas, volverán a coincidir a:

$$5 + \frac{5}{11} = \frac{55 + 5}{11} = \frac{60}{11} \text{ horas}$$

PROBLEMAS SOBRE GRIFOS

Para resolverlos, se hace un razonamiento simple, reduciendo la capacidad de llenar el recipiente los grifos a unidades de tiempo.

Ej.: Una fuente llena un estanque en 3 horas y otra tarda en llenar el mismo estanque en 2 horas. Averiguar cuánto tardarán en llenarlo las dos a la vez.

Llamando V a la capacidad del estanque.

1.ª fuente → llena en 3 horas → en una hora llena $\frac{v}{3}$

2.ª fuente → llena en 2 horas → en una hora llena $\frac{v}{2}$

1.ª y 2.ª fuente → llenan en t horas → en una hora llenan $\frac{v}{3} + \frac{v}{2}$

Luego multiplicando lo que llenan en una hora las dos juntas $\frac{v}{3} + \frac{v}{2}$ por el tiempo t que tardan en llenar la totalidad del estanque, resultará igual a la totalidad de la capacidad del estanque V.

$$\left(\frac{v}{3} + \frac{v}{2}\right) t = v \rightarrow \frac{vt}{3} + \frac{vt}{2} = v, \text{ dividiendo por } v.$$

$$\frac{t}{3} + \frac{t}{2} = 1 \rightarrow 2t + 3t = 6 \rightarrow 5t = 6 \rightarrow t = \frac{6}{5} \text{ hora}$$

Ej.: Un recipiente se llena con un grifo en 3 horas y con otro grifo en 4 horas. Un tubo de dasagüe tarda en vaciarlo 5 horas. Calcular el tiempo que tarda en llenarse el depósito, si se abren a la vez los dos grifos y el tubo de desagüe.

Llamando V a la capacidad del estanque.

1.º grifo → llena en 3 horas → en una hora llena $\frac{v}{3}$

2.º grifo → llena en 4 horas → en una hora llena $\frac{v}{4}$

Desagüe → vacía en 5 horas → en una hora vacía $\frac{v}{5}$

1 - 2 grifo y desagüe → llenan en t horas →

→ en una hora llenan $\frac{v}{3} + \frac{v}{4} - \frac{v}{5}$

$\left(\frac{v}{3}+\frac{v}{4}-\frac{v}{5}\right)t = v \rightarrow \frac{vt}{3}+\frac{vt}{4}-\frac{vt}{5} = v$. dividiendo por v

$\frac{t}{3} + \frac{t}{4} - \frac{t}{5} = 1 \rightarrow 20t + 15t - 12t = 60$

$23t = 60 \rightarrow$ **$t = \frac{60}{23}$ horas**

Ej.: Dos manantiales llenan un depósito en 18 horas. Calcular el tiempo que tardarían cada uno de ellos en llenarlo separadamente sabiendo que el primero, afluyendo solo emplearía 27 horas más que el segundo.

Llamando V a la capacidad del depósito.

1.º manantial → llena en t_1 horas → en una hora llena $\frac{v}{t_1}$

2.º manantial → llena en t_2 horas → en una hora llena $\frac{v}{t_2}$

1.º y 2.º manantial → llenan en 18 horas →

→ en una hora llenan $\frac{v}{t_1} + \frac{v}{t_2}$

$$\left(\frac{v}{t_1}+\frac{v}{t_2}\right)18 = v \left\{\begin{array}{l} \frac{18}{t_1}+\frac{18}{t_2} = 1 \\ t_1 = t_2 + 27 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 18t_2 + 18t_1 = t_1t_2 \\ t_1 = t_2 + 27 \end{array}\right\}$$

$18t_2 + 18(t_2 + 27) = (t_2 + 27)t_2$

$18t_2 + 18t_2 + 486 = t_2^2 + 27t_2$

$t_2^2 - 9t_2 - 486 = 0$

$$t_2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1944}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{2025}}{2} =$$

$$= \frac{9 \pm 45}{2} = \begin{array}{l} 27 \\ -\cancel{18} \text{ (no válida)} \end{array}$$

$t_2 = 27 \rightarrow t_1 = t_2 + 27 \rightarrow t_1 = 27 + 27 = 54$

1.º Manantial → llena en 54 horas

2.º Manantial → llena en 27 horas

MULTIPLICACION DE SEMILLAS

El girasol, esa preciosa y gran planta ¿Quién no ha comido pipas de girasol tostadas, de la que además y principalmente se saca el aceite?

Si de una planta que tenga por ejemplo, mil pipas o semillas, cada semilla al caer al suelo y teniendo suficiente terreno, germinaría y nos daria mil nuevas plantas. De esas mil nuevas plantas sus semillas las hacemos germinar y al otro verano siguiente produciría nuevas plantas y veamos lo que sucedería en unos años:

1 año 1 planta producen ..... 1.000 semillas
2.º año 1.000 plantas producen ..... 1.000.000 semillas
3.º año 1.000.000 plantas producen ..... 1.000.000.000 semillas
4.º año 1.000.000.000 plantas producen ..... 1.000.000.000.000 semillas
5.º año 1.000.000.000.000 plantas producen ... 1.000.000.000.000.000 semillas

¡¡ OJO !! Acabamos de sembrar el globo terrestre!! al sembrar este último número de semillas.

En un pueblo de la sierra de cierta provincia española, convocaron unas oposiciones a barrendero. Los solicitantes tenían que saber las 4 reglas.

Uno de los que aspiraban al puesto se encontró con una hoja de papel encima de su mesa:

$9 \times 1 = 9$
$9 \times 2 =$ .....A partir de este punto ya empezó a dudar y no pudo continuar.
9×3
9×4
9×5
9×6
9×7
9×8
9×9

Antes de examinarse le habían dicho los profesionales (barrenderos) que era importante saber las preguntas que había fallado y compararlas con las que había acertado, entonces fue numerando las falladas y de arriba hacia abajo y las fue numerando:

$9 \times 1 = 9$
$9 \times 2 = 1$
$9 \times 3 = 2$
$9 \times 4 = 3$
$9 \times 5 = 4$
$9 \times 6 = 5$
$9 \times 7 = 6$
$9 \times 8 = 7$
$9 \times 9 = 8$

¡Acerté una y fallé 8!. No puede ser, me he equivocado. Voy a sumar otra vez pero de abajo a arriba, veamos!

$9 \times 1 = 9$
$9 \times 2 = 18$
$9 \times 3 = 27$
$9 \times 4 = 36$
$9 \times 5 = 45$
$9 \times 6 = 54$
$9 \times 7 = 63$
$9 \times 8 = 72$
$9 \times 9 = 81$

Dicho aspirante a la plaza, salió descorazonado, viendo que había fallado 8 de 9 preguntas, y aunque iba muy bien recomendado, sabía que no se la darían a él. Cuál no sería su sorpresa, cuando le avisaron que la plaza era para él. ¡¡La fuerza que tiene una buena recomendación!!, va diciendo todavía por ahí.

19.— PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS.

Cuando mezclamos distintas mercancías de la misma especie y de distinto precio cada una, se obtiene una mezcla.

El asunto consiste generalmente en hallar el precio medio de la mezcla resultante.

CANTIDADES	PRECIOS
C_1	P_1
C_2	P_2
C_3	P_3
.	.
.	.

$$P_m = \frac{P_1C_1 + P_2C_2 + P_3C_3 + \ldots}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots}$$

— Cuando alguno de los componentes de la mezcla sea agua, consideraremos su precio como cero.

Ej.: Con dos clases de café, de 90 ptas. y 120 ptas. el Kg. Se quiere obtener una mezcla de 100 ptas. el Kg. Calcular la cantidad que hay que poner de cada clase para obtener 130 Kg. de mezcla.

Llamando C_1 y C_2 a las cantidades de café que hay que poner de cada clase, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 100 = \dfrac{90C_1 + 120C_2}{C_1 + C_2} \\ C_1 + C_2 = 130 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 100 = \dfrac{90C_1 + 120C_2}{130} \\ C_1 + C_2 = 130 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 90C_1 + 120C_2 = 13.000 \\ C_1 + C_2 = 130 \end{array}\right\}$$

$C_1 = 130 - C_2$ Sustituyendo en la primera ecuación:

$$90\ (130 - C_2) + 120C_2 = 13.000$$
$$11.700 - 90C_2 + 120C_2 = 13.000$$
$$30C_2 = 1.300$$

$$C_2 = \frac{1300}{30} = \frac{130}{3}\ \text{Kg}$$

$$C_1 = 130 - C_2 = 130 - \frac{130}{3} = \frac{260}{3}\ \text{Kg}$$

Ej.: Tenemos dos clases de vino. Mezclando 8 litros de la 1.ª con 5 litros de la 2.ª se obtiene una mezcla que vale 550 ptas.

Si mezclamos 6 litros de la 1.ª clase con 11 litros de la 2.ª, la mezcla vale 630 ptas.

Cuál es el precio del vino de cada clase.

1.ª clase = x ptas.
2.ª clase = y ptas.

$$\left.\begin{array}{l} 550 = \dfrac{8x + 5y}{8 + 5} \\ 630 = \dfrac{6x + 11y}{6 + 11} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 550 = \dfrac{8x + 5y}{13} \\ 630 = \dfrac{6x + 11y}{17} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 5y = 7.150 \\ 6x + 11y = 10.710 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{7150 - 5y}{8}$$

$$6\,\frac{7150 - 5y}{8} + 11y = 10710\ ;$$

$$42.900 - 30y + 88y = 85.680$$

$$58y = 42.780$$

$$y = \frac{42780}{58} \simeq 737{,}5 \text{ ptas.}$$

$$x = \frac{7150 - 5\,\dfrac{42780}{58}}{8} = \frac{414700 - 213900}{464} =$$

$$= \frac{200800}{464} \simeq 432{,}7 \text{ ptas.}$$

20.— PROBLEMAS SOBRE ALEACIONES.

Son problemas similares a los de mezclas, sólo que en vez de tratar precios tratamos leyes.

Se entiende por **aleación de dos metales** a la mezcla homogénea de los dos en cualquier proporción y por procedimientos físicos.

Se llama **lingote** a un trozo de una aleación.

En las aleaciones se suelen mezclar metales de valor y otros que carecen de valor.

Pues bien, se llama **metal fino** a los metales preciosos o finos como son: oro, plata, platino..., y se llama **metal bruto** al que va acompañando al metal fino, y se le considera con valor cero (Generalmente suele ser el cobre).

Se entiende por **ley** de una aleación al cociente de dividir el peso de metal fino entre el peso total de la mezcla y se expresa en milésimas.

El valor indicativo de una ley está siempre comprendido entre 0 y 1.

Si la ley es 0 es que sólo existe metal bruto y si la ley es 1 es que sólo existe metal fino.

— También se puede expresar la ley en quilates, considerando como denominador al 24 y siendo el numerador, el número de quilates de oro puro que tiene la aleación. (El oro puro tiene 24 quilates)

Ej.: Un anillo de oro de 15 quilates contiene $\frac{15}{24}$ su peso en oro (metal fino)

LEY MEDIA DE UNA ALEACIÓN DE VARIOS LINGOTES.

PESOS	LEYES	
P_1	l_1	$l_m = \dfrac{l_1 p_1 + l_2 p_2 + l_3 p_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}$
P_2	l_2	
P_3	l_3	
.	.	

Una de las ciudades más europeas de España es sin duda Santiago de Compostela. Aquí vive y está latente el espíritu del viejo continente.

Fue en el siglo IX cuando el Papa León III anunció a la cristiandad el descubrimiento de la tumba del Apóstol Santiago. La humilde ermita de San Fiz de Solovio en que se encontró, vio crecer la primera iglesia y llegar los primeros peregrinos.

Hombres de todas las naciones y de todas las lenguas emprendieron un largo camino lleno de dificultades.

Almas piadosas construyeron puentes y marcaron el camino, crearon hospitales y hospederías.

El año 1105 vio iniciarse la gran obra de la actual Basílica Compostelana el obispo Gelmirez, y sus amigos los monjes negros de Cluny, fijaron el camino y organizaron las jornadas.

Los cuatro caminos que por Francia, atravesando toda Europa llegaban a España, se hacían dos al pie de los Pirineos, uno entraba por Somoportu y el otro por Roncesvalles.

Trece eran las jornadas por tierra española, ya cerca de Compostela en la zona de Triacastela, los peregrinos cargaban con piedras calizas que en Castañola se hacían cal para colaborar a la construcción de la gran Basílica.

Para guardar el camino y ayudar a los peregrinos, se creó la orden de Caballeros de Santiago.

En Noruega la mayoría de la gente viaja entre casa y casa deslizándose por medio de esquís.

Un señor que estaba citado con un vecino y deseaba llegar a la hora en punto, calculó que si hacía 10 km. por hora llegaría una hora después, y si la velocidad era de 15 km. por hora llegaría una hora antes.

¿Qué velocidad tiene que llevar para llegar a la hora de la cita?

SOLUCION

Si a la velocidad de 15 km. estuviera en camino 2 horas más (es decir, el mismo n.º de horas que a 10 km/hora) recorrería 30 km. más de los necesarios, si en 1 hora recorre 5 km. más, está en camino 30 : 5 = 6 horas. De aquí se deduce que 6 horas − 2 horas de más = 4 horas marchando a 15 km. hora.

La distancia recorrida se averigua 15 × 4 = 60 km.

Luego para emplear 5 horas de recorrido y llegar en punto

60 : 5 = 12 km/h.

FORMA DE MEJORAR UNA LEY, AÑADIENDO METAL FINO.

	PESOS	LEYES
Lingote antíguo	P_1	l_1
Lingote nuevo	P_2	l_2

$$\text{Nueva ley} = \frac{l_1 p_1 + l_2 p_2}{p_1 + p_2}$$

Ej.: Cuando una ley sea por ejemplo de 0,800, nos están indicando que existe, 800 gramos de metal fino en una aleación de 1.000 g. de peso.

Ej.: Un lingote de plata de ley 0,85 que pesa 3 Kg. se funde con otro lingote de plata de ley 0,7 que pesa 2,5 Kg. ¿Cuál será la ley del nuevo lingote?

$$l_m = \frac{0{,}85 \cdot 3 + 0{,}7 \cdot 2{,}5}{3 + 2.5} = \frac{2{,}55 + 1{,}75}{5{,}5} \simeq 0{,}78$$

Ej.: La ley de un lingote de oro que pesa 130 g. es de 0,850. Averiguar la cantidad de oro puro que habría que añadir para que resultara un nuevo lingote de ley 0,900.

Si al lingote de 130 g. le tenemos que añadir oro, es evidente que en el nuevo lingote no habrá habido variación del peso del metal bruto.

$$\text{ley} = \frac{\text{peso metal fino}}{\text{peso total lingote}} \rightarrow 0{,}850 = \frac{\text{metal fino}}{130} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{metal fino} = 0{,}850 \cdot 130 = 110{,}5 \text{ gr.}$$

Lingote de ley 0,850 ⟨ 110,5 g. metal fino
Lingote de ley 0,850 ⟨ 130-110,5 = 19,5 g. metal bruto

Lingote de ley 0,900 ⟨ x g. metal fino
Lingote de ley 0,900 ⟨ 19,5 g. metal bruto

$$\Rightarrow 0{,}900 = \frac{x}{x + 19{,}5}$$

$$0{,}900\,x + 17{,}55 = x \; ; \; 17{,}55 = 0{,}1\,x \; ; \; x = \frac{17{,}55}{0{,}1} = 175{,}5 \text{ gr.}$$

Luego hemos tenido que añadir:

175,5 − 130 = 45,5 g. de metal fino (oro)

FIN DEL TOMO 1.º